



ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, алгебраич. уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

определитель в левой части Х. у. получается из определителя квадратной *матрицы* $A = ||a_{ij}||_1^n$ вычитанием величины λ из диагональных элементов. Этот определитель является многочленом порядка n относительно величины λ , который называется характеристическим многочленом матрицы A . Х. у. можно записать в виде

$$(-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n = 0,$$

где $S_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ — т. н. след матрицы A , S_2 — сумма всех гл. миноров 2-го порядка, т. е. определителей

вида $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}$, $i < k$, и т. д., а S_n — определитель матрицы A . Корни Х. у. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются собственными

числами или собственными значениями матрицы A , они играют важную роль при изучении матриц и *линейных преобразований*. У действительной симметричной матрицы, а также у эрмитовой матрицы все числа λ_k действительны, у действительной кососимметричной матрицы все числа λ_k чисто мнимые, для действительной ортогональной матрицы, а также для унитарной матрицы все числа $|\lambda_k| = 1$.

Х. у. встречаются в самых разнообразных областях математики, механики, физики, техники. В астрономии при определении вековых возмущений планет также приходят к Х. у., откуда и второе название для Х. у. — вековое уравнение.

Х. у. линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

— алгебраич. уравнение, которое получается из данного дифференциального уравнения после замены функции y и её производных соответствующими степенями величины λ , т. е. уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

К этому уравнению приходят при отыскании частных решений вида $y = ce^{\lambda x}$ для данного дифференциального уравнения.

Для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Х. у. записывается в том же виде, что (*), и совпадает с Х. у. матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^n$, составленной из коэффициентов уравнений данной системы.

Processing math: 100%