



# ФУРЬЕ РЯД

Авторы: По материалам одноимённой статьи С. А. Теляковского из Математического энциклопедического словаря

ФУРЬЕ РЯД функции  $f(x)$  на промежутке  $(a, b)$ , ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ , где  $\{\varphi_k(x)\}_k \geq 0$  – нормированная [ортogonalная система функций](#), а коэффициенты  $c_k$  (коэффициенты Фурье) определяются равенствами  $c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k=0, 1, \dots$ . О функции  $f(x)$  в общем случае предполагается, что её квадрат интегрируем на  $(a, b)$ . Аналогично строятся Ф. р. для функций мн. переменных. Ф. р. по ортонормированным системам функций возникли как обобщение Ф. р. по тригонометрич. системе. Дальнейшие обобщения приводят к Ф. р. в гильбертовом пространстве.

Ф. р. по тригонометрич. системе определяется для каждой функции  $f$ , модуль которой интегрируем на  $(0, 2\pi)$ . Это ряд  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  с коэффициентами  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$  Имея в виду Ф. р. по тригонометрич. системе, обычно говорят просто о Ф. р., не указывая, по какой системе они строятся.

Впервые Ф. р. появились в работах Ж. [Фурье](#) (1807), посвящённых исследованию задач теплопроводности. Он предложил для представления функции  $f$ , заданной на  $(0, 2\pi)$  тригонометрич. рядом, брать ряд (1) с коэффициентами (2). Выбор коэффициентов (2) является естественным со многих точек зрения. Напр., если формально приравнять ряд (1) функции  $f(x)$ , то почленное интегрирование приводит к коэффициентам  $a_k, b_k$ , определяемым по формулам (2). Так их получал ещё Л. [Эйлер](#) (1777).

Интеграл в (2) можно понимать по-разному, напр. как интеграл Римана или Лебега. В зависимости от этого говорят о рядах Фурье – Римана, Фурье – Лебега и т. п. Совр. вид теория Ф. р. приобрела после построения интеграла Лебега, после чего она развивается гл. обр. как теория рядов Фурье – Лебега.

В теории Ф. р. исследуются вопросы представления функций с помощью Ф. р., изучается связь свойств функции со свойствами её ряда Фурье.

Если квадрат функции  $f$  интегрируем, то частичные суммы Ф. р.  $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  обращают в минимум интеграл  $\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx$ , где  $t_n$  – произвольный тригонометрич. многочлен порядка  $n$ , при этом  $\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$ . т. е. функции с интегрируемым квадратом сколь угодно хорошо аппроксимируются частичными суммами своих Ф. р. в смысле среднего квадратичного отклонения. Справедливо неравенство  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx$ , называемое неравенством Бесселя, а также [Парсеваля равенство](#).

Первый признак сходимости Ф. р. получил П. [Дурихле](#) (1829), обобщением его результата является теорема Жордана (1881): если [вариация функции](#)  $f$  конечна, то её Ф. р. сходится для всех  $x$ , причём в точках непрерывности он сходится к  $f(x)$ , а в точках разрыва – к полусумме предельных значений  $f(x+0)$  и  $f(x-0)$ . Согласно

принципу локализации, доказанному Б. [Риманом](#) (1853), сходимость или расходимость Ф. р. функции  $f$  в точке  $x$  и значение его суммы в случае сходимости зависят только от поведения функции  $f$  в как угодно малой окрестности этой точки. Известно много разных признаков сходимости Ф. р. в точке. Напр., нем. математик Р. Липшиц установил (1864), что Ф. р. функции  $f$  сходится в точке  $x$ , если для достаточно малых  $h$  выполнено условие  $|f(x+h)-f(x)| \leq M |h|^\alpha$ , где  $M$  и  $\alpha$  – некоторые положительные числа.

В 1915 Н. Н. [Лузин](#) высказал гипотезу о том, что для каждой функции с интегрируемым квадратом её Ф. р. сходится к ней почти всюду, т. е. для всех действительных  $x$ , кроме, быть может, множества, для которого мера Лебега равна нулю (см. [Мера множества](#)). Справедливость этой гипотезы установил Л. [Карлесон](#) (1966). Если о функции не предполагать ничего, кроме интегрируемости её модуля, то её Ф. р. может оказаться расходящимся почти всюду или всюду. Первые такие примеры построил А. Н. [Колмогоров](#) (1923).

Поскольку частичные суммы Ф. р. сходятся не всегда, рассматривается суммирование Ф. р., когда для представления функции используются те или иные средние частичных сумм её Ф. р. (см. [Суммирование рядов](#)).

## Литература

Лит.: Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1–2; Толстов Г. П. Ряды Фурье. 3-е изд. М., 1980; Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М., 1985. Т. 1–2.

Processing math: 0%