



# УРАВНЕНИЕ

УРАВНЕНИЕ, аналитическая запись задачи об определении значений аргументов, при которых значения двух заданных функций равны. Аргументы, от которых зависят эти функции, обычно называют неизвестными, а значения неизвестных, при которых значения функций равны, — решениями (корнями)  $У$ .; о таких значениях неизвестных говорят, что они удовлетворяют данному  $У$ . Напр.,

$3x - 6 = 0$  является  $У$ . с одним неизвестным, а

$x = 2$  есть его решение;

$x^2 + y^2 = 25$  —  $У$ . с двумя неизвестными, а

$x = 3$ ,

$y = 4$  есть одно из его решений. Совокупность решений данного  $У$ . зависит от области

$M$  значений, допускаемых для неизвестных.  $У$ . может не иметь решений в

$M$ , тогда оно называется неразрешимым в области

$M$ . Если  $У$ . разрешимо, то оно может иметь одно, или несколько, или даже бесконечное множество решений.

Напр.,  $У$ .

$x^4 - 4 = 0$  неразрешимо в области рациональных чисел, но оно имеет два решения

$x_1 = \sqrt{2}$ ,

$x_2 = -\sqrt{2}$  в области действительных чисел и четыре решения

$x_1 = \sqrt{2}$ ,

$x_2 = -\sqrt{2}$ ,

$x_3 = i\sqrt{2}$ ,

$x_4 = -i\sqrt{2}$ , в области комплексных чисел.  $У$ .

$\sin x = 0$  имеет бесконечное множество решений

$x_k = \pi k$ ,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , в области действительных чисел. Если  $У$ . имеет решениями все числа области

$M$ , то оно называется тождеством в области

$M$ . Напр.,  $У$ .

$x = \sqrt{x^2}$  является тождеством на множестве неотрицательных чисел и не является тождеством в области действительных чисел.

Совокупность  $У$ ., для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем этим  $У$ ., называется системой  $У$ .; значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем  $У$ . системы, — решениями системы. Напр., совокупность  $У$ .

$x + 2y = 5$ ,

$2x + y - z = 1$  является системой двух  $У$ . с тремя неизвестными; одним из решений этой системы является

$x = 1$ ,

$y = 2$ ,

$$z = 3.$$

Две системы  $У$ . (или два  $У$ .) называются равносильными, если каждое решение одной системы (одного  $У$ .) является решением другой системы (другого  $У$ .), и наоборот, причём обе системы (оба  $У$ .) рассматриваются в одной и той же области. Напр.,  $У$ .

$$x - 4 = 0 \text{ и}$$

$2x - 8 = 0$  равносильны, т. к. решениями обоих  $У$ . является лишь

$x = 4$ . Процесс поиска решений  $У$ . обычно заключается в замене данного  $У$ . равносильным. В некоторых случаях приходится заменять данное  $У$ . другим, для которого совокупность решений шире, чем у данного  $У$ . Решения нового  $У$ ., не являющиеся решениями данного  $У$ ., называются посторонними решениями (корнями). Напр., возводя в квадрат  $У$ .

$$\sqrt{x - 3} = -2 \text{ получают } У.$$

$$x - 3 = 4, \text{ решение которого}$$

$x = 7$  является посторонним для исходного  $У$ . Поэтому если при решении  $У$ . производились действия, могущие привести к появлению посторонних решений (напр., возведение  $У$ . в квадрат), то все полученные решения преобразованного  $У$ . проверяют подстановкой в исходное уравнение.

Наиболее изучены  $У$ ., для которых входящие в них функции являются многочленами, – [алгебраические уравнения](#). Среди систем  $У$ . простейшими являются системы [линейных уравнений](#).

Одному  $У$ . с двумя неизвестными можно сопоставить линию на плоскости, координаты всех точек которой удовлетворяют данному  $У$ . Одному  $У$ . с тремя неизвестными можно сопоставить поверхность в трёхмерном пространстве. При такой интерпретации решение системы  $У$ . совпадает с задачей нахождения точек пересечения линий, поверхностей и т. д.;  $У$ . с большим числом неизвестных можно сопоставить многообразие в многомерном пространстве.

В теории чисел и в др. разделах математики важную роль играют [диофантовы уравнения](#).

Наряду с вопросами нахождения решений  $У$ . различного вида, в общей теории изучаются вопросы о существовании и единственности решения, о непрерывности зависимости решения от тех или иных данных и т. д.