



ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ

ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ, наука о целых числах, в которой изучаются вопросы представления натуральных чисел с помощью чисел специального вида, делимость чисел, распределение простых чисел на действительной оси и т. д. Ч. т. возникла из задач [арифметики](#), связанных с умножением и делением целых чисел.

В Древней Греции (6 в. до н. э.) изучалась делимость (см. [Деление](#)) чисел [натурального ряда](#), были выделены отд. подклассы целых чисел (напр., [простые числа](#) и составные, которые являются произведениями простых), изучалась структура [совершенных чисел](#), было дано решение в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, т. е. был указан алгоритм построения прямоугольных треугольников со сторонами, длины которых являются целыми числами. В [«Началах» Евклида](#) дано систематич. построение теории делимости на основе [Евклида алгоритма](#) для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, доказана первая теорема теории простых чисел – бесконечность множества простых чисел. Несколько позднее [Эратосфеном](#) был найден метод получения простых чисел, который стал называться [Эратосфена решето](#).

Систематизация проблем Ч. т. и методов их решения проведена [Диофантом](#) в его «Арифметике», где, в частности, дано решение в рациональных числах мн. алгебраич. уравнений 1-й и 2-й степени с целыми коэффициентами от нескольких неизвестных.

В Китае начиная со 2 в. в связи с календарными расчётами возникла задача определения наименьшего целого числа, дающего при делении на заданные числа заданные остатки, которая была решена кит. математиками Сунь-цзы (3–5 вв.) и Цинь Цзюшао (13 в.).

В Индии Брахмагупта (7 в.) и [Бхаскара](#) дали общие методы решения в целых числах неопределённых уравнений 1-й степени с двумя неизвестными и уравнений вида $ax^2 + b = cy^2$ и $xy = ax + by + c$.

В Европе расцвет Ч. т. начался с работ П. [Ферма](#). Он исследовал решения мн. уравнений в целых числах, в частности, высказал гипотезу о том, что уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, $n > 2$, не имеет решения в натуральных числах x , y , z ([Ферма Великая теорема](#)), доказал, что простые числа вида $4n + 1$ являются суммами двух квадратов, доказал одно из основных утверждений теории [сравнений](#): $a^p - a$ делится на p , если a – целое число, не делящееся на p , и p – простое число ([Ферма малая теорема](#)).

Исключительно важный вклад в Ч. т. внёс Л. [Эйлер](#). Он доказал Великую теорему Ферма при $n = 3$, обобщения малой теоремы Ферма, ряд теорем о представлении чисел квадратичными формами. Эйлер был первым, кто для решения задач Ч. т. привлёк средства математич. анализа, что привело к созданию аналитич. теории чисел.

Исследуя вопрос о числе решений уравнений вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = N$, где a_1, \dots, a_n – натуральные числа, в целых неотрицательных числах x_1, \dots, x_n , он ввёл [производящую функцию](#) $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)z^k$ где $\mu(k)$ – число решений (1) при $N = k$, $|z| < 1$, которая связана с функциями $\Phi_1(z) = \frac{1}{1 - z^{a_1}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_1k}, \dots, \Phi_n(z) = \frac{1}{1 - z^{a_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_nk}$, $|z| < 1$, равенством $\Phi(z) = \Phi_1(z) \cdot \dots \cdot \Phi_n(z)$. Зная функцию $\Phi(z)$, легко получить значения $\mu(N)$, напр.,

дифференцируя $\Phi(z): \mu(N)=\Phi^{\{N\}}(0)/N!$. Производящие функции Эйлера явились источником т. н. кругового метода Харди – Литтлвуда – Рамануджана и [Виноградова метода](#) – осн. методов совр. аддитивной теории чисел, теории, в которой изучаются задачи Ч. т., связанные с представлением чисел в виде сумм.

[Дзета-функция](#), введённая Эйлером, и её обобщения составляют основу совр. аналитич. методов исследования проблем [простых чисел распределения](#), большой вклад в исследование которых внёс П. Л. [Чебышев](#).

К. [Гаусс](#) создал осн. методы и завершил построение теории сравнений, доказал т. н. закон взаимности квадратичных [вычетов](#), сформулированный Л. Эйлером, заложил основы теории представления чисел квадратичными формами вида $ax^2+bxy+cy^2$ и формами высших степеней со многими переменными, ввёл т. н. Гауссовы суммы $\sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{an^2}{m}}$ которые явились первыми тригонометрич. суммами в Ч. т., и показал их полезность в решении задач. Если до Гаусса Ч. т. представляла собой собрание отд. результатов и идей, то после его работ она стала развиваться в разл. направлениях как стройная теория.

К. Гаусс и П. [Дирихле](#) первыми стали рассматривать вопросы о количестве точек с целочисленными координатами в областях на плоскости. Гаусс доказал, что число таких точек в круге $x^2+y^2 \leq R^2$ равно сумме площади этого круга πR^2 и величины, которая при увеличении R растёт не быстрее первой степени R , а Дирихле доказал, что число таких точек с положительными координатами под гиперболой $xy=N$ равно сумме $N(\ln N+2C-1)$, где C – [Эйлера постоянная](#), и величины, которая при увеличении N растёт не быстрее \sqrt{N} . Обобщения этих утверждений, а также нахождение наилучших возможных остатков в этих суммах (проблема Гаусса целых точек в круге и проблема делителей Дирихле) послужили источником большой главы теории чисел.

Вместе с изучением свойств целых чисел в 19 в. возникло и стало развиваться новое направление в Ч. т., изучающее арифметику числовой прямой. Уже Л. Эйлер отмечал, что квадратные корни из целых чисел и логарифмы целых чисел принципиально отличаются друг от друга. Последнее обстоятельство обрело точную формулировку после работ Ж. [Лиувилля](#) (1844), который ввёл понятия [алгебраических чисел](#) и [трансцендентных чисел](#). Оказывается, что алгебраич. числа «плохо» приближаются рациональными дробями. Лиувилль доказал, что если алгебраич. число является корнем уравнения степени n , то, приближаясь к нему дробями вида p/q , где p и q – целые взаимно простые числа, подойти существенно ближе, чем q^{-n} , нельзя. Вопросы об алгебраичности и трансцендентности конкретных чисел довольно трудны; первыми были такие вопросы о числах π и e ; трансцендентность числа e доказана Ш. [Эрмитом](#) (1873), числа π – нем. учёным Ф. Линдеманом (1882), таким образом была решена задача о [квадратуре круга](#). После работ Лиувилля и Э. [Куммера](#) стала развиваться алгебраич. Ч. т., в которой исследуются также расширения поля рациональных чисел, отличные от множества действительных чисел (см. [Число](#)).

В 20 в. в Ч. т. стали развиваться новые разделы, напр. метрическая Ч. т., в которой используются понятия теории меры, и вероятностная Ч. т., в которой используются понятия и методы теории вероятностей.

Особенностью и привлекательностью Ч. т. является простота и доступность формулировок большинства проблем и трудность их решения. Напр., проблема близнецов, т. е. задача о том, конечно или нет множество пар простых чисел, для которых разность равна двум, была поставлена ещё Евклидом, но до сих пор (2017) не решена. См. также [Варинга проблема](#), [Гольдбаха проблема](#).

Литература

Лит.: Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. М., 1985; Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М., 2004; Виноградов И. М. Основы теории чисел. 12-е изд. СПб., 2009.

Processing math: 0%