ЧЕБЫШЕ́ВА МНОГОЧЛЕ́НЫ

ЧЕБЫШЕ́ВА МНОГОЧЛЕ́НЫ, система ортогональных многочленов на отрезке $–1 \leqslant x \leqslant 1$, открытая П. Л. *Чебышевым* (1854).

Ч. м. первого рода определяются формулой $T_n(x)=\cos(n\,\text{arccos} \,x)=\frac{2^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^{n-1/2})$, в частности, $T_0=1,\,T_1=x,\,T_2=2x^2-1$. Они ортогональны с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, т. е. имеют место формулы $0,\qquad m≠n,\\ \int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{π}{2}\qquad m=n\geqslant 1,\\ π,\qquad m=n=0$. Ч. м. первого рода $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ наименее отклоняется от нуля. Это означает, что среди всех многочленов степени n со старшим коэф. 1 именно максимум модуля $\max\left| \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \right|$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеет наименьшее значение, причём этот максимум равен $\frac{1}{2^{n-1}}$. Ч. м. $y=T_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ и для них справедлива рекуррентная формула $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n–1}(x),\,n \geqslant 1$.

Ч. м. второго рода $U_n(x)$ ортогональны на отрезке $–1 \leqslant x \leqslant 1$ с весом $\sqrt{1-x^2}$, т. е. $\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx=0,\,m\neq n,\\\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{π}{2},\,m=n$. Они определяются формулой $U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\text{arccos}\,x)}{\sqrt{1-x^2}}=\\=\frac{2^n(n+1)!}{(2n+1)!}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^{n+1/2}$.

В частности, $U_0(x)=1,\,U_1(x)=2x,\,U_2(x)=4x^2-1$. Дифференциальное уравнение и рекуррентная формула для Ч. м. второго рода имеют вид $(1-x^2)y''-3xy'+n(n+1)y=0,\\ U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n–1}(x),\,n \geqslant 1$. Ч. м. первого и второго рода связаны соотношением $U_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{dT_{n+1}(x)}{dx}$

Эрмита многочлены часто называют многочленами Чебышева – Эрмита.