



# ЧЕБЫШЁВА МНОГОЧЛЁНЫ

ЧЕБЫШЁВА МНОГОЧЛЁНЫ, система ортогональных многочленов на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ , открытая П. Л.

[Чебышевым](#) (1854).

Ч. м. первого рода определяются формулой  $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n-1/2})$ , в частности,  $T_0=1$ ,  $T_1=x$ ,  $T_2=2x^2-1$ . Они ортогональны с весом  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ , т. е. имеют место формулы  $\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$ ,  $\delta_{mn} = 1$  при  $m=n=0$ ,  $\delta_{mn} = 0$  при  $m \neq n$ . Ч. м. первого рода  $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$  наименее отклоняется от нуля. Это означает, что среди всех многочленов степени  $n$  со старшим коэф. 1 именно максимум модуля  $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)|$  на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  имеет наименьшее значение, причём этот максимум равен  $\frac{1}{2^{n-1}}$ . Ч. м.  $y=T_n(x)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению  $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$  и для них справедлива рекуррентная формула  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ ,  $n \geq 1$ .

Ч. м. второго рода  $U_n(x)$  ортогональны на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  с весом  $\sqrt{1-x^2}$ , т. е.  $\int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$ ,  $\delta_{mn} = 1$  при  $m=n$ ,  $\delta_{mn} = 0$  при  $m \neq n$ . Они определяются формулой  $U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^n (n+1)!}{(2n+1)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^{n+1/2})$ .

В частности,  $U_0(x)=1$ ,  $U_1(x)=2x$ ,  $U_2(x)=4x^2-1$ . Дифференциальное уравнение и рекуррентная формула для Ч. м. второго рода имеют вид  $(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+1)y = 0$ ,  $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ ,  $n \geq 1$ . Ч. м. первого и второго рода связаны соотношением  $U_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx}$ .

[Эрмита многочлены](#) часто называют многочленами Чебышева – Эрмита.