



# ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, класс специальных функций, являющихся решениями дифференциального уравнения  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$ , где  $\nu$  — произвольный параметр. К этому уравнению сводятся мн. вопросы равновесия (упругого, теплового, электрического) и колебаний тел цилиндрич. формы. Решение, имеющее вид  $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$ , где  $\Gamma$  — гамма-функция; ряд справа сходится при всех значениях  $x$ ,  $\nu \geq 0$ , называется Ц. ф. 1-го рода порядка (индекса)  $\nu$ . В частности, Ц. ф. нулевого порядка имеет вид  $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$ .

Если  $\nu$  — целое отрицательное,  $\nu = -n$ , то  $J_\nu(x)$  определяется как  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ . Ц. ф. порядка  $\nu = m + 1/2$ , где  $m$  — целое число, сводится к элементарным функциям, напр.  $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ ,  $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ .

Функции  $J_\nu(x)$  и уравнение (1) называют также по имени Ф. [Бесселя](#) (*Бесселя функции*, *Бесселя уравнение*). Однако эти функции и уравнение (1) были получены ещё Л. [Эйлером](#) при изучении колебаний мембраны в 1738, функция нулевого порядка встречается ещё раньше в работе Д. [Бернулли](#), посвящённой колебанию тяжёлой цепи (1732), а функция порядка  $1/3$  — в письме Я. Бернулли к Г. В. [Лейбницу](#) (1703).

Если  $\nu$  не является целым числом, то общее решение уравнения (1) имеет вид  $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ , где  $C_1, C_2$  — постоянные. Если же  $\nu$  — целое, то  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  линейно зависимы и их линейная комбинация (2) уже не является общим решением уравнения (1). Поэтому, наряду с Ц. ф. 1-го рода, вводят ещё Ц. ф. 2-го рода (называемые также функциями Вебера):  $Y_\nu(x) = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \frac{J_\mu(x) \cos \mu\pi - J_{-\mu}(x) \sin \mu\pi}{\mu - \nu}$ . При помощи этих функций общее решение уравнения (1) может быть записано в виде  $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$  как при целом, так и при нецелом  $\nu$ .

В приложениях встречаются Ц. ф. мнимого аргумента  $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$  и  $K_\nu(x) = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\mu}(x) - I_\mu(x)}{\mu - \nu} \sin \mu\pi$  (функция Макдональда). Эти функции удовлетворяют уравнению  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0$ , общее решение которого имеет вид  $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$  как при целом, так и при нецелом  $\nu$ . Часто употребляются ещё Ц. ф. третьего рода (или функции Ганкеля)  $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$ ,  $H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x)$ , а также функции Томсона  $ber(x)$ ,  $bei(x)$ , определяемые соотношением  $ber(x) + ibei(x) = I_0(x\sqrt{i})$ .

Ц. ф. изучены очень детально и для комплексных значений аргументов.

## Литература

Лит.: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., 1949. Ч. 1–2; Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М., 1974; Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. 2-е изд. М., 1974.

Т. 2.