



ТРАНСФИНИТНОЕ ЧИСЛО

ТРАНСФИНИТНОЕ ЧИСЛО́ (от *транс...* и лат. finitus – ограниченный), обобщение понятия порядкового числа (см. ниже). Определение Т. ч. опирается на понятие вполне *упорядоченного множества*. Каждое конечное множество можно сделать вполне упорядоченным, расположив все его элементы в определённом порядке. Простейшим примером бесконечного вполне упорядоченного множества является множество всех натуральных чисел, расположенных в порядке возрастания; то же множество, расположенное в порядке убывания (так, что большее считается предшествующим меньшему), уже не будет вполне упорядоченным, т. к. ни одно его бесконечное подмножество не имеет первого элемента. Два упорядоченных подмножества X и Y называются подобными или имеющими один и тот же порядковый тип, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок элементов. Все конечные вполне упорядоченные множества, содержащие одинаковое число элементов, подобны между собой. Поэтому порядковые типы конечных вполне упорядоченных множеств можно отождествить с натуральными числами, которые появляются, таким образом, как порядковые числа (тогда как, характеризуя количество элементов множества, те же натуральные числа выступают в другом своём аспекте – количественных чисел).

Т. ч. называются порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств. Тем самым понятие Т. ч. представляет собой распространение понятия порядкового числа на бесконечные множества. Аналогичное обобщение количественного числа приводит к понятию *мощности множества*. Т. к. неравномощные множества нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие, то вполне упорядоченным множествам разл. мощности соответствуют различные Т. ч. Однако обратное (в отличие от конечных множеств) неверно: бесконечные вполне упорядоченные множества могут быть равномощными, не будучи подобными, и тем самым определяя различные трансфинитные числа.

Для Т. ч. можно ввести понятия «больше» и «меньше». Именно Т. ч. α , по определению, меньше Т. ч. β ($\alpha < \beta$), если какое-либо (а значит, и любое) вполне упорядоченное множество типа α подобно некоторому отрезку какого-нибудь (а следовательно, и любого) множества типа β . При этом отрезком вполне упорядоченного множества, отсечённым элементом x , называется подмножество его элементов, предшествующих x . Для любых Т. ч. α и β всегда либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha > \beta$.

В применении Т. ч. к разл. вопросам математики важную роль играет принцип трансфинитной индукции, обобщающий обычный принцип *математической индукции* на произвольные вполне упорядоченные множества: если некоторое предложение верно для первого элемента вполне упорядоченного множества X и если из того, что оно верно для всех элементов множества X , предшествующих данному элементу x из множества X , следует его справедливость и для элемента x , то это предложение верно для каждого элемента множества X .

Литература

Лит. см. при статьях *Множеств теория*, *Число*.

