



ТЕЙЛОРА РЯД

ТЕЙЛОРА РЯД, степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$, где числовая функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные $f^{(k)}$ всех порядков. При определённых условиях ряд (1) сходится к $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 . Частичные суммы ряда (1) называются многочленами Тейлора. При $x_0=0$ разложение функции в Т. р. принимает вид $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (этот ряд иногда называют рядом Маклорена), в частности, $e^x=1+\frac{x}{1!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+\dots$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\dots$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\dots+(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}+\dots$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}+\dots$. Ряды в правых частях (2) – (4) сходятся к функциям в их левых частях при любых значениях x , ряд в правой части (5) – при $-1 < x \leq 1$.

Если x_0 – комплексное число, функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 в множестве комплексных чисел и дифференцируема в точке x_0 , то существует окрестность этой точки, где функция f является суммой своего Т. р. (1). Если же x_0 – действительное число, функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 в множестве действительных чисел и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то функция f может ни в какой окрестности x_0 не быть суммой своего Т. р. Напр., функция $f(x)=e^{-1/x^2}$, при $x \neq 0$, и $f(x)=0$, при $x=0$ бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, не равна тождественно нулю ни в какой окрестности нуля, а все коэффициенты её Т. р. в нуле равны нулю.

Если функция раскладывается в некоторой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единствен и является её Т. р. в этой точке. Однако один и тот же степенной ряд может являться Т. р. для разных действительных функций. Так, степенной ряд, у которого все коэффициенты равны нулю, является как Т. р. для функции, тождественно равной нулю на всей действительной оси, так и Т. р. для функции (6) в точке $x_0=0$.

Достаточным условием сходимости Т. р. (1) к действительной функции f на интервале (x_0-h, x_0+h) является ограниченность в совокупности всех её производных на этом интервале.

Ряд (1) опубликовал Б. [Тейлор](#) (1715), ряд, сводящийся к (1) простым преобразованием, – И. [Бернулли](#) (1694).