



СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, специальные функции, применяемые для изучения физических явлений в пространственных областях, ограниченных сферическими поверхностями, и для решения физических задач, обладающих сферической симметрией. С. ф. являются решениями дифференциального уравнения
$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y(\theta, \varphi) = 0,$$
 получающегося при разделении переменных в [Лапласа уравнении](#) в сферич. координатах r, θ, φ . Общий вид решения $Y_l(\theta, \varphi) = \sum_{m=-l}^l a_m Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \sum_{m=-l}^l a_m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$, где a_m – постоянные, а $P_l^m(\cos \theta)$ – присоединённые функции Лежандра степени l и порядка m , определяемые равенством $P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{dx^m}$ где P_l – [Лежандра многочлены](#).

Характерным примером многочисл. приложений С. ф. к вопросам математич. физики и механики является их применение в теории потенциала. Пусть $\sigma = \sigma(\theta, \varphi)$ – поверхностная плотность распределения массы по сфере радиуса R с центром в начале координат; если σ можно разложить в ряд С. ф. $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi)$, сходящийся равномерно на поверхности сферы, то потенциал, соответствующий этому распределению масс в каждой точке (r, θ, φ) , внешней относительно данной сферы, равен $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi)$, а в каждой точке, внутренней по отношению к сфере, равен $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi)$.

Общие члены этих рядов являются шаровыми функциями степеней $n-1$ и n соответственно.

С. ф. были введены А. [Лежандром](#) и П. [Лапласом](#) в кон. 18 в.

Литература

Лит.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. 2-е изд. М., 1973. Т. 1–2.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/GreekAndCoptic.js