

# СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРОВЕРКА

Авторы: А. В. Прохоров

СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРОВЕРКА, один из основных разделов математической статистики, объединяющий методы проверки соответствия статистич. данных некоторой статистич. гипотезе о вероятностной природе данных. Процедуры С. г. п. позволяют принимать или отвергать [статистические гипотезы](#), возникающие при обработке или интерпретации результатов наблюдений во многих практически важных разделах науки и производства, связанных со случайностью. Правило, в соответствии с которым принимается или отклоняется данная гипотеза, называется статистич. критерием. Построение критерия определяется выбором подходящей функции  $T=T(X_1, \dots, X_n)$  от результатов наблюдений  $X_1, \dots, X_n$ , которая служит мерой расхождения между фактич. и гипотетич. значениями. Эта функция, являющаяся случайной величиной, называется статистикой критерия, при этом предполагается, что распределение вероятностей  $T$  может быть вычислено при допущении, что проверяемая гипотеза верна и что распределение  $T$  не зависит от характеристик гипотетич. распределения. По распределению статистики  $T$  находится критич. значение  $T_0$  такое, что вероятность неравенства  $T > T_0$  равна  $\alpha$ , где  $\alpha$  – заранее заданный уровень значимости [область значений  $(x_1, \dots, x_n)$ , для которых  $T(x_1, \dots, x_n) > T_0$ , т. е. область отклонения гипотезы  $H_0$ , называемая критич. областью]. Если в конкретном случае обнаружится, что  $T > T_0$ , то считается, что расхождение значимо и гипотеза отвергается, тогда как появление значения  $T \leq T_0$  не противоречит гипотезе. Такого рода критерии, называемые критериями значимости, используются для проверки как гипотез о параметрах распределения, так и гипотез о самих распределениях. В частном случае, когда проверяется согласие между выборочным и гипотетич. распределением, пользуются термином критерий согласия.

Пусть, напр., проверяется гипотеза о том, что независимые наблюдения  $X_1, \dots, X_n$  имеют нормальное распределение со средним значением  $a=a_0$  при известной дисперсии  $\sigma^2$ . В этом случае среднее арифметическое  $\overline{X}=(X_1, \dots, X_n)/n$  результатов наблюдений распределено нормально с математич. ожиданием  $a=a_0$  и дисперсией  $\sigma^2/n$ , а величина  $\sqrt{n} \frac{\overline{X} - a_0}{\sigma}$  имеет стандартное [нормальное распределение](#). Полагая  $T=\sqrt{n} \frac{|\overline{X} - a_0|}{\sigma}$ , можно найти связь между  $T_0$  и  $\alpha$ , скажем, по таблицам нормального распределения (величина  $T_0$  является [квантилью](#) порядка  $1-\alpha/2$  или, что то же самое, абсолютной величиной квантили порядка  $\alpha/2$  стандартного нормального распределения). Напр., при гипотезе  $a=a_0$  событие  $T > 1,96$  имеет вероятность 0,05. Правило, в соответствии с которым гипотеза  $a=a_0$  объявляется неверной при  $T > 1,96$ , будет приводить к отбрасыванию этой гипотезы в среднем в 5 случаях из 100, в которых она верна. Если же  $T \leq 1,96$ , то это ещё не означает, что гипотеза подтверждается, т. к. указанное неравенство с большой вероятностью может выполняться при  $a$ , близких к  $a_0$ . Таким образом, при использовании предложенного критерия можно лишь утверждать, что результаты наблюдений не противоречат гипотезе  $a=a_0$ .

Если дисперсия  $\sigma^2$  неизвестна, то для проверки гипотезы  $a=a_0$  вместо приведённого выше критерия можно пользоваться критерием Стьюдента, основанным на величине  $\sqrt{n} \frac{\overline{X} - a_0}{s}$ , которая включает

несмещённую оценку дисперсии  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X})^2$  и имеет [Стьюдента распределение](#) с  $n-1$  степенью свободы. Полагая  $T = \sqrt{n} \frac{\overline{X} - a_0}{s}$ , можно найти связь между  $T_0$  и  $\alpha$  по таблицам распределения Стьюдента.

При решении вопроса о принятии или отклонении к.-л. гипотезы  $H_0$  с помощью любого критерия, основанного на результатах наблюдения, могут быть допущены ошибки двух типов. Ошибка «первого рода» совершается тогда, когда отвергается верная гипотеза  $H_0$ . Ошибка «второго рода» совершается в том случае, когда гипотеза  $H_0$  принимается, а на самом деле верна не она, а к.-л. альтернативная гипотеза  $H_1$ . Естественно требовать, чтобы критерий для проверки данной гипотезы приводил возможно реже к ошибочным решениям. Обычная процедура построения наилучшего критерия для проверки простой статистич. гипотезы заключается в выборе среди всех критериев с заданным уровнем значимости  $\alpha$  (вероятность ошибки 1-го рода) такого, который имел бы наименьшую вероятность ошибки 2-го рода или, что то же самое, наибольшую вероятность отклонения гипотезы, когда она неверна. Последняя вероятность (разность между единицей и ошибкой 2-го рода) называется мощностью статистич. критерия. В случае, когда альтернативная гипотеза  $H_1$  простая, наилучшим будет критерий, который имеет наибольшую мощность среди всех др. критериев с заданным уровнем значимости  $\alpha$ . Если альтернативная гипотеза  $H_1$  сложная, напр. зависит от параметра, то мощность критерия будет функцией, определённой на классе простых альтернативных гипотез, составляющих  $H_1$ , т. е. будет функцией параметра. Критерий, имеющий наибольшую мощность при каждой альтернативной гипотезе из  $H_1$ , называется равномерно наиболее мощным статистич. критерием, однако следует отметить, что такие критерии существуют лишь в немногих спец. ситуациях. В задаче о проверке простой гипотезы  $a = a_0$  о среднем значении нормального распределения против сложной альтернативной гипотезы  $a > a_0$  равномерно наиболее мощной критерий существует, тогда как при проверке той же гипотезы против сложной альтернативы  $a \neq a_0$  его нет. Поэтому часто ограничиваются поиском равномерно наиболее мощных критериев в тех или иных спец. классах.

Важную роль в теории С. г. п. играют идеи, связанные с [последовательным анализом](#).

## Литература

Лит.: Крамер Г. Математические методы статистики. 2-е изд. М., 1975; Леман Э. Проверка статистических гипотез. 2-е изд. М., 1979.