



РЯД

Авторы: По материалам статьи Л. Д. Кудрявцева и А. П. Юшкевича из Математического энциклопедического словаря

Ряд в математике, бесконечная сумма $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ или, что то же самое, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Слагаемые $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются членами Р. (u_n иногда называют общим членом Р.), суммы $s_n = u_1 + \dots + u_n, n=1, 2, \dots$, — частичными суммами Р. порядка n .

Р. являются важнейшими средствами вычисления, изучения и приближения чисел и функций. Простейшие Р. встречаются в элементарной математике — это, напр., бесконечные десятичные дроби $\frac{1}{3} = 0,333\dots = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$, и сумма членов бесконечно убывающей геометрич. прогрессии $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$. Для многих чисел, использующихся в математике, имеются их представления в виде Р., напр. для числа π справедливы равенства $\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots$ и $\frac{\pi^4}{4} = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \dots$ для числа e — основания натуральных логарифмов — справедливо равенство $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$.

При вычислениях сумма Р. обычно заменяется конечной суммой s_n его первых n слагаемых. При этом очень важен ответ на вопрос о том, насколько величина s_n при данном n близка к сумме Р., или, как иногда говорят, вопрос о «скорости сходимости» величин s_n к сумме Р.

Различают Р. числовые, членами которых являются числа (напр., все Р. $(2) - (5)$), и функциональные, членами которых являются функции, напр. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Если в функциональном Р. переменной x придать числовое значение, то такой Р. превращается в числовой. Напр., Р. (5) получается из функционального Р. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ при $x=1$. Когда идёт речь о *сходимости* Р., то имеют в виду сходимость числового Р., заданного непосредственно или получающегося из функционального Р. при тех или иных значениях переменной. Решение многих задач в математике и её приложений значительно упрощается, если рассматриваемые функции представлять в виде Р., члены которых являются простейшими функциями. При выполнении некоторых условий математич. операции над Р. (сложение, умножение, предельный переход, почленное дифференцирование и интегрирование) проводятся по тем же простым правилам, что и одноим. операции над конечными суммами.

Числовые ряды

Р. (1) называется сходящимся, если сходится последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм, в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ называется суммой Р. и пишут $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Т. о., обозначение (1) применяется как для самого Р., так и для его суммы (если он сходится). Если последовательность частичных сумм не имеет предела, то Р. называется расходящимся. Пример сходящегося Р. даёт Р. (2) для любого $|q| < 1$, этот же Р. при любом $|q| \geq 1$ даёт пример расходящегося Р., в частности, при $q=-1$ этот Р. есть $1-1+1-1+\dots$, частичные суммы последнего Р. принимают всего два значения 0 и 1.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, называемый суммой $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и его сумма равна сумме данных $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и λ – комплексное число, то $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$, называемый произведением $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на число λ , также сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Условие сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, не использующее величины его суммы, даёт критерий Коши: для того чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число n_ε , что при любом натуральном $n > n_\varepsilon$ и любом целом $p \geq 0$ выполнялось неравенство $|\sum_{k=n}^{n+p} u_k| < \varepsilon$. Отсюда следует, что если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Обратное неверно: общий член $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ стремится к нулю, однако этот ряд расходится.

В теории рядов большую роль играют ряды с неотрицательными членами. Для того чтобы такой ряд сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху. Для рядов с неотрицательными членами имеются спец. признаки сходимости.

Интегральный признак сходимости: если функция $f(x)$ определена при всех $x \geq 1$, неотрицательна и убывает, то $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$. С помощью этого признака сходимости легко устанавливается, напр., что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Признак сравнения: если для двух рядов с неотрицательными членами существует такая постоянная $c > 0$, что $0 \leq u_n \leq c v_n$, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Как следствие признака сравнения получается следующее правило: если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = c$, $u_n \geq 0$, то при $c < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $c \geq 1$ и $0 < c \leq \infty$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Часто оказываются полезными два следствия признака сравнения.

Признак Д'Аламбера: если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = c$, $u_n > 0$, то при $c < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $c > 1$ – расходится.

Признак Коши: если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = c$, $u_n \geq 0$, то при $c < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $c > 1$ – расходится. При $c = 1$ как в случае признака Д'Аламбера, так и в случае признака Коши существуют и сходящиеся, и расходящиеся ряды.

Важный класс рядов составляют абсолютно сходящиеся ряды: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2/3}}$ абсолютно сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ не абсолютно. Сумма абсолютно сходящихся рядов и произведение абсолютно сходящегося ряда на число являются абсолютно сходящимися рядами. На абсолютно сходящиеся ряды наиболее полно переносятся свойства конечных сумм. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд, состоящий из тех же членов, что и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, но взятых в др. порядке. Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится абсолютно, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также абсолютно сходится и его сумма совпадает с суммой $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ также абсолютно сходится и его сумма равна сумме $\sum_{n=1}^{\infty} v_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ также абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, т. е. абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, не заботясь о порядке членов. Признаки сходимости для рядов с неотрицательными членами применимы для установления абсолютной сходимости рядов.

$P.$, сходящиеся не абсолютно, называют условно сходящимися, для них утверждение о независимости их суммы от порядка слагаемых неверно. Справедлива теорема Римана: посредством надлежащего изменения порядка членов данного условно сходящегося $P.$ можно получить $P.$, имеющий любую наперёд заданную сумму, или расходящийся $P.$ Примером условно сходящегося $P.$ может служить $P. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2 = 0.693\dots$. Если в этом $P.$ переставить члены так, чтобы за двумя положительными следовал один отрицательный: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$, то его сумма увеличится в 1,5 раза. Существуют признаки сходимости, применимые к не абсолютно сходящимся рядам. Напр., признак Лейбница: если $u_n \geq u_{n+1} > 0$ для всех $n \geq 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то знакочередующийся $P. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится. Более общие признаки можно получить для $P.$ вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Признак Абеля: если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а $P. \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $P. (10)$ также сходится. Признак Дирихле: если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм $P. \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, то $P. (10)$ сходится.

Иногда рассматриваются $P.$ вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$. Такой $P.$ называют сходящимся, если сходятся $P. \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$, сумма этих рядов называется суммой исходного $P.$ Более сложную структуру имеют т. н. кратные $P.$, т. е. $P.$ вида $\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, где u_{n_1, n_2, \dots, n_k} – заданные числа, занумерованные k индексами n_1, n_2, \dots, n_k , каждый из которых независимо от других пробегает натуральный ряд чисел.

Для некоторых $P.$ удаётся получить простые формулы или оценки их остатков $r_n = s - s_n$, что весьма важно, напр., при оценке точности вычислений, проводимых с помощью $P.$ Напр., для геометрич. прогрессии $r_n = \frac{q^n}{1-q}$, $|q| < 1$, для $P. (7)$ при сделанных предположениях $\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < r_n < \int_n^{\infty} f(x) dx$, а для $P. (9)$ $|r_n| \leq u_{n+1}$.

С помощью некоторых спец. преобразований иногда удаётся «улучшить» сходимость сходящегося $P.$ В математике и её приложениях используются не только сходящиеся, но и расходящиеся $P.$ Для последних вводятся более общие понятия суммы $P.$, см. [Суммирование рядов](#).

Функциональные ряды

Понятие $P.$ естественным образом обобщается на случай, когда членами $P.$ являются функции $u_n = u_n(x)$ (действительные, комплексные или, более общо, функции, значения которых принадлежат какому-то метрич. пространству), определённые на некотором множестве E . В этом случае $P. \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in E$, называют функциональным рядом. Если этот $P.$ сходится в каждой точке множества E , то он называется сходящимся на множестве E , и множество E называется областью сходимости. Напр., $P. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится на всей комплексной плоскости.

Сумма сходящегося $P.$ непрерывных, напр. на некотором отрезке, функций необязательно является непрерывной функцией. Условия, при которых на функциональные $P.$ переносятся свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости конечных сумм функций, формулируются в терминах равномерной сходимости $P.$ Сходящийся $P. (11)$ называют равномерно сходящимся на множестве E , если во всех точках E отклонения частичных сумм $P. s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ от его суммы $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ при

достаточно больших числах n не превышают одной и той же сколь угодно малой величины, точнее, каково бы ни было наперёд заданное число $\varepsilon > 0$, существует такое число n_ε , что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in E$. Это условие равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in E} |s(x) - s_n(x)| = 0$. Напр., $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} (x-1)$ равномерно сходится на отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, и не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Для того чтобы $P. (11)$ равномерно сходился на множестве E , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число n_ε , что для всех $n > n_\varepsilon$, $p \geq 0$ и всех точек $x \in E$ выполнялось неравенство $|u_n(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ (критерий Коши). Если существует такой сходящийся числовой $P. \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что $|u_n(x)| \leq a_n$, $x \in E$, $n=1, 2, \dots$, то $P. (11)$ равномерно сходится на E (признак Вейерштрасса).

Сумма равномерно сходящегося $P.$ непрерывных на некотором отрезке (или, более общо, на некотором топологич. пространстве) функций является непрерывной на этом отрезке (пространстве) функцией. Сумма равномерно сходящегося $P.$ интегрируемых на некотором множестве является интегрируемой на этом множестве функцией, и $P.$ можно интегрировать почленно. Если последовательность частичных сумм $P.$ интегрируемых функций сходится в среднем к некоторой интегрируемой функции, то интеграл от этой функции равен сумме $P.$ из интегралов от членов $P.$ Интегрируемость в этих утверждениях понимается в смысле Римана или Лебега. Для интегрируемых по Лебегу функций достаточным условием возможности почленного интегрирования $P.$ с почти всюду сходящейся последовательностью частичных сумм является равномерная оценка их абсолютных величин некоторой интегрируемой по Лебегу функцией. Если члены сходящегося на некотором отрезке $P. (11)$ дифференцируемы на нём и $P.$ из их производных сходится равномерно, то сумма $P.$ также дифференцируема на этом отрезке и $P.$ можно дифференцировать почленно.

Понятие функционального $P.$ обобщается и на случай кратных $P.$ В разл. разделах математики и её приложениях широко используются разложения функций в функциональные $P.$, прежде всего в [степенные ряды](#) и [тригонометрические ряды](#).

Метод разложения в $P.$ является эффективным методом изучения функций, вычисления и оценок интегралов, решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных). Мощным методом исследования является [гармонический анализ](#), основанный на представлении периодич. и почти периодич. функций [Фурье рядами](#). См. также [Асимптотический ряд](#), [Лорана ряд](#), [Тейлора ряд](#).

Литература

Лит.: Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. 4-е изд. М., 1979; Никольский С. М. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2001; Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2012. Т. 1–3; Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 7-е изд. М., 2014. Ч. 1.