



РАСКРЫ́ТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

РАСКРЫ́ТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ, вычисление пределов функций, заданных формулами, которые в результате подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, т. е. переходят в выражения $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . По этим выражениям нельзя судить о том, существуют ли искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют. Р. н. часто основывается на замене одной функции другой, которая имеет тот же предел и вычисление которого не представляет трудностей. Иногда такая замена достигается путём алгебраич. преобразований. Так, в выражении $\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)}$ числитель и знаменатель при $x \neq 1$ можно сократить на $1-x$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$.

Осн. инструментом для Р. н. служит [Тейлора формула](#), с помощью которой выделяется гл. часть функции. Так, для того чтобы найти предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (т. е. в случае неопределённости $0/0$), функции f и g с помощью формулы Тейлора (если это возможно) представляют в виде $f(x) = a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$, $x \rightarrow x_0$, $a \neq 0$, и $g(x) = b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$, $x \rightarrow x_0$, $b \neq 0$, $(a(x-x_0)^n)$ и $b(x-x_0)^m$ – первые ненулевые слагаемые в представлениях функций $f(x)$, $g(x)$ в окрестности точки x_0 и в результате получают $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{n-m}$. Последний предел равен нулю, если $n > m$, равен a/b , если $n = m$, и бесконечен, если $n < m$.

В случае неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ для вычисления предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x)$ применяют преобразование $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$, сводящее задачу к Р. н. $0/0$. Неопределённости $0 \cdot \infty$ и $\infty \cdot \infty$ также целесообразно приводить к виду $0/0$ преобразованиями $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$ и $f(x) = \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{(1/f(x))(1/g(x))}$. Для Р. н. 0^0 , ∞^0 , 1^∞ целесообразно вначале прологарифмировать выражения, предел которых требуется найти.

Для Р. н. $0/0$ и ∞/∞ можно использовать теорему (правило) Лопиталья, утверждающую, что в этих случаях $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности (конечной или бесконечно удалённой) точки x_0 , за возможным исключением самой точки x_0 , и второй предел существует. Это правило сообщено И. Бернулли франц. математику Г. де Лопиталю, который опубликовал его в 1696.

Неопределённости $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$ рассматривал Л. [Эйлер](#) (1748), а ∞^0 , 1^∞ – О. [Коши](#) (1821, 1823).