



# ПРЕДИКА́ТОВ ИСЧИСЛÉНИЕ

Авторы: В. Е. Плиско

ПРЕДИКА́ТОВ ИСЧИСЛÉНИЕ, общее название формальных систем, служащих для формализации логических умозаключений, в которых учитывается как логическая структура суждений (т. е. каким образом данное суждение получено из других с помощью логических операций), так и их субъективно-предикативная структура, т. е. связь между субъектом суждения (о чём говорится в данном суждении) и предикатом (что говорится о субъекте). При этом для логич. анализа суждений наряду с такими логич. операциями, как дизъюнкция, конъюнкция, импликация, отрицание, эквивалентность, используются кванторы, а субъективно-предикативная структура уточняется с помощью понятия предиката.

Поскольку в математич. логике интересуются лишь структурой суждений, отвлекаясь от их конкретного смысла, а также во избежание двусмысленностей, свойственных естественным языкам, для построения логики предикатов используется формализованный язык, алфавит которого обычно содержит четыре группы символов:

1) предикатные переменные – выражения вида  $x$ , где

$m$  и

$n$  – неотрицательные целые числа; 2) предметные переменные

$x_1, x_2, \dots$ ; 3) логич. символы

$\&$  (конъюнкция),

$\vee$  (дизъюнкция),

$\rightarrow$  (импликация),

$\approx$  (эквивалентность),

$\neg$  (отрицание),

$\exists$  (квантор существования),

$\forall$  (квантор всеобщности); 4) вспомогательные символы

$(, )$  (скобки) и

$,$  (запятая). Выражение

$P_n^m$  называется

$m$ -местной предикатной переменной,

0-местные предикатные переменные – пропозициональными переменными.

Элементарной формулой называется всякая пропозициональная переменная, а также любое выражение вида

$P(y_1, \dots, y_m)$ , где

$P$  – к.-л.

$m$ -местная предикатная переменная ( $m > 0$ ), а

$y_1, \dots, y_m$  – произвольные предметные переменные. Из элементарных формул следующим образом строятся предикатные формулы: 1) все элементарные формулы суть формулы; 2) если

$\square$  и

$\square$  – формулы, то выражения

$(\square \& \square)$ ,

$(\square \vee \square)$ ,

$(\square \rightarrow \square)$ ,

$(\square \approx \square)$ ,

$\neg \square$  считаются формулами; 3) если

$\square$  – формула,

$x$  – предметная переменная, то

$\forall x \square$  и

$\exists x \square$  суть формулы. Напр.,

$$P_0^1, P_1^0(x), \exists x_1 P_1^2(x_1, x_3), (P_0^1(x_2) \& \exists x_1 P_1^2(x_1, x_2))$$

являются предикатными формулами.

Часть формулы

$\square$ , которая сама является формулой, называется подформулой формулы

$\square$ . Областью действия квантора

$\forall y$  или

$\exists y$  в формуле

$\square$  называется такая её подформула

$\square$ , что

$\forall y \square$  или

$\exists y \square$  является подформулой формулы

$\square$ . Вхождение переменной

$y$  в формулу

$\square$  называется связанным, если оно есть вхождение в квантор

$\forall y$  или

$\exists y$  либо в область действия одного из этих кванторов. Всякое вхождение переменной

$y$ , не являющееся связанным, называется свободным. Напр., в формуле

$(\forall x_1 P_0^1(x_1) \& P_1^1(x_1))$  первые два вхождения переменной

$x_1$  – связанные, а третье – свободное. Переменная

$y$  называется свободной переменной формулы

$\square$ , если она имеет свободные вхождения в

$\square$ .

Говорят, что задана интерпретация формулы

$\square$  на непустом множестве

$M$ , если каждой свободной переменной формулы

$\square$  сопоставлен некоторый элемент из

$M$ , а каждой

$m$ -местной предикатной переменной из

$\Box$  – некоторый

$m$ -местный предикат на

$M$ . Истинностное значение

$|\Box|$  формулы

$\Box$  в данной интерпретации определяется индукцией по построению формулы

$\Box$ . Если

$\Box$  имеет вид

$P(y_1, \dots, y_m)$ , то её значением является значение предиката, сопоставленного предикатной переменной  $P$ , на наборе значений переменных

$y_1, \dots, y_m$ . Если

$\Box$  имеет вид

$\neg \Box$ , то

$|\Box| = \text{И}$  («истина») тогда и только тогда, когда

$|\Box| = \text{Л}$  («ложь»). Аналогично, в соответствии с истинностными значениями для логич. операций

$\&$ ,

$\vee$  ,

$\rightarrow$  ,

$\sim$  определяются значения формул вида

$(\Box \& \Box)$ ,

$(\Box \vee \Box)$ ,

$(\Box \rightarrow \Box)$ ,

$(\Box \sim \Box)$  через значения формул

$\Box$  и

$\Box$ . Напр.,

$|\Box \& \Box| = \text{И}$  тогда и только тогда, когда

$|\Box| = \text{И}$  и

$|\Box| = \text{И}$ . Значение формулы

$\forall y \Box$  есть

$\text{Л}$  в том и только в том случае, когда

$|\Box| = \text{Л}$  в некоторой интерпретации, полученной из данной приписыванием значения переменной

$y$ . Значение формулы

$\exists y \Box$  есть

$\text{И}$ , если

$|\Box| = \text{И}$  в некоторой интерпретации, полученной из данной приписыванием значения переменной

$y$ . Если

$|\Box| = \text{И}$ , то говорят, что формула

$\Box$  истинна в данной интерпретации.

Предикатная формула называется общезначимой на множестве

$M$ , если она истинна в любой интерпретации на

$M$ . Напр., формула

$$\exists x_1 P_0^1(x_1) \rightarrow \forall x_2 P_0^1(x_2))$$

общезначима на любом множестве, содержащем ровно один элемент, и не будет общезначимой на  $M$ , если в

$M$  есть хотя бы два элемента. Формула называется общезначимой, или тавтологией, или тождественно истинной, если она общезначима на любом непустом множестве. Тот факт, что формула

$\Box$  общезначима, обозначают так:

$\vdash \Box$ .

Целью логики предикатов является описание класса всех общезначимых формул. Одним из способов такого описания является построение П. и., т. е. исчисления, аксиомами и выводимыми объектами которого являются предикатные формулы. При этом в качестве аксиом выбираются некоторые общезначимые формулы, а правила вывода позволяют из общезначимых формул получать новые общезначимые формулы.

Обычно классич. П. и. строятся на основе того или иного варианта высказываний исчисления: аксиомы классич. исчисления высказываний считаются схемами аксиом П. и., т. е. любая предикатная формула, полученная из некоторой аксиомы исчисления высказываний подстановкой в неё к.-л. предикатных формул вместо пропозициональных переменных, объявляется аксиомой П. и. Напр., из аксиомы исчисления высказываний  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$  таким образом получается аксиома П. и.

$$(\forall x_2 P_0^1(x_2) \rightarrow (P_3^0 \rightarrow \forall x_2 P_0^1(x_2))).$$

К этим аксиомам добавляются две новые схемы аксиом

$$(\forall x \Box(x) \supset \Box(y)) \text{ и } (\Box(y) \supset \exists x \Box(x)),$$

$\Box(x)$  – произвольная предикатная формула, в которой переменная

$x$  не находится в области действия кванторов

$\forall y$  и

$\exists y$ , а формула

$\Box(y)$  получена заменой в

$\Box(x)$  каждого свободного вхождения переменной

$x$  на

$y$ . Правилами вывода П. и. являются правило модус поненс и следующие два правила:

$\forall$ -правило, позволяющее из формулы

$(\Box \rightarrow \Box)$  получить формулу

$(\Box \rightarrow \forall x \Box)$ , где

$\Box$  и

$\Box$  – произвольные предикатные формулы, причём

$B$  не содержит свободно переменную

$x$ , и

$\exists$ -правило, позволяющее при тех же предположениях относительно формул

$\Box$ ,

$\Box$  и переменной

$x$  перейти от формулы

$(\Box \rightarrow \Box)$  к формуле

$(\exists x \Box \rightarrow \Box)$ .

Выводом формулы

$\Box$  в П. и. называется конечная последовательность формул

$\Box_1, \dots, \Box_m$  такая, что каждая из формул

$\Box_i$  либо есть аксиома, либо получается из некоторых предшествующих ей формул по одному из перечисленных правил вывода, и

$\Box_m$  совпадает с

$\Box$ . Формула

$\Box$  выводима в П. и. или является теоремой, если можно построить вывод этой формулы. Согласно теореме Гёделя о полноте, все общезначимые предикатные формулы и только они выводимы в классич. исчислении предикатов.

Дедуктивный аппарат П. и., т. е. система аксиом и правила вывода, используется при построении логико-математич. исчислений (напр., формальной арифметики и [аксиоматической теории множеств](#)).

## Литература

Лит.: Марков А. А. О логике конструктивной математики. М., 1972; Новиков П. С. Элементы математической логики. 2-е изд. М., 1973; Клини С. К. Математическая логика. 4-е изд. М., 2008.

Processing math: 100%