

# ПРЕДЕЛ

Авторы: По материалам статей Л. Д. Кудрявцева и Т. С. Пиголкиной из Математического энциклопедического словаря

**ПРЕДЕ́Л**, одно из основных понятий математики, означающее, что некоторая переменная в рассматриваемом процессе её изменения неограниченно приближается к какому-то постоянному значению. Точный смысл термин «П.» имеет лишь при наличии корректного понятия близости между элементами (точками) множества, в котором указанная переменная принимает значения. Осн. понятия математич. анализа – непрерывность, производная, интеграл – определяются с помощью П. Наиболее простыми являются понятия П. функции (в частности, П. последовательности) и понятие П. интегральных сумм.

## Предел числовой последовательности

Число *a* называют пределом последовательности  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует (зависящее от него) натуральное число *N* такое, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и л и } x_n \rightarrow a$$

и говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  стремится (сходится) к *a*, П. последовательности  $\{x_n\}$  равен *a*. Неравенство (1) можно переписать в виде  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , оно означает, что точка (число)  $x_n$  принадлежит  $\varepsilon$ -окрестности точки *a*. Геометрич. смысл понятия П. последовательности состоит в том, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки *a* лежат все элементы последовательности  $\{x_n\}$ , кроме, быть может, конечного их числа. Числовая последовательность, имеющая П., называется сходящейся. Не всякая последовательность сходится; напр., последовательность  $\{(-1)^n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , не стремится ни к какому пределу, её элементы попеременно равны  $-1$  и  $+1$  и не могут одновременно попасть в интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  при  $0 < \varepsilon < 1$  ни при каком *a*. Последовательность, не имеющая П., называется расходящейся.

Последовательность может иметь лишь единственный П. Если последовательность сходится, то она ограничена, т. е. её элементы лежат на некотором ограниченном отрезке действительной оси. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано – Вейерштрасса). Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  сходятся, то справедливы равенства: для любых чисел  $\lambda$  и  $\mu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right),$$

если  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

Числовая последовательность сходится к конечному П. тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши: для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число *N* (зависящее от  $\varepsilon$ ) такое, что для всех  $n > N$  и любого натурального *m* расстояние между элементами последовательности  $x_n$  и  $x_{n+m}$  меньше  $\varepsilon$ , т. е.  $|x_n - x_{n+m}| < \varepsilon$  (критерий Коши). Такие последовательности называются фундаментальными. Т. о., сходящимися являются фундаментальные последовательности и только они.

Всякая ограниченная и монотонная последовательность является сходящейся. В частности, если последовательность не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет П. и этот П. есть точная верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности. Примером возрастающей и ограниченной сверху последовательности является последовательность периметров правильных *n*-угольников,  $n \geq 3$ , вписанных в некоторую окружность. П. этой последовательности

является длина окружности. Др. пример возрастающей и ограниченной сверху последовательности:  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . П. этой последовательности есть

иррациональное число, обозначаемое *e*.

Пределы некоторых числовых последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0, \quad a > 0, \quad |q| < 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a, \quad -\infty < a < \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_e n}{n^a} = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \alpha > 0.$$

Стремящаяся к нулю последовательность называется бесконечно малой. Бесконечно малые последовательности играют особую роль в теории П.

последовательностей, т. к. общее определение П. последовательности может быть дано в терминах бесконечно малых: П. последовательности  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равен *a* тогда и только тогда, когда последовательность  $\{x_n - a\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , есть бесконечно малая. В период формирования осн. понятий математич. анализа он назывался анализом бесконечно малых.

Иногда рассматриваются бесконечные П. последовательностей. Бесконечный П. последовательности вводится как свойство последовательности  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , быть бесконечно большой: для любого положительного числа *K* существует такое натуральное число *N*, что при всех  $n > N$  справедливо неравенство  $|x_n| > K$ . При этом пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ и л и } x_n \rightarrow \infty$$

и говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  стремится к бесконечности, имеет бесконечный П. Напр.,  $n^2 \rightarrow \infty$ ,  $2^n \rightarrow \infty$ ,  $n! \rightarrow \infty$ . Если последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , бесконечно большая и, начиная с некоторого  $n$ , принимает только положительные (отрицательные) значения,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  то (соответственно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ).

Если множества точек  $x$ , удовлетворяющие условиям  $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $x < -\frac{1}{\varepsilon}$  и  $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , назвать  $\varepsilon$ -окрестностями  $+\infty$ ,  $-\infty$  и  $\infty$  соответственно, то определения как конечного, так и бесконечного П. формулируются одинаково: П. последовательности  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равен  $a$  (где  $a$  — число или один из символов  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $\infty$ ), если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное  $N$ , что все элементы последовательности с номерами  $n > N$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности  $a$ .

Некоторые свойства П. последовательности одинаковы в случае конечного и бесконечного П. Напр., если последовательности  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и  $\{y_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , имеют П. (конечные или бесконечные) и, начиная с некоторого  $n$ , справедливы неравенства  $x_n \leq y_n$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , т. е. при предельном переходе нестрогие неравенства сохраняются.

Если последовательность имеет П. (конечный или определённого знака бесконечный), то любая её подпоследовательность имеет тот же П. Конечный или бесконечный П. подпоследовательности данной последовательности называют её частичным П. Наибольший (наименьший) из частичных П. числовой последовательности всегда существует и называется верхним (нижним) П. этой последовательности. Совпадение верхнего и нижнего П. последовательности равносильно тому, что она имеет (конечный или определённого знака бесконечный) предел.

Для последовательности комплексных чисел определение П. аналогично: число  $a = \alpha + i\beta$  называется П. последовательности  $\{z_n\}$ ,  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N$  такое, что при всех  $n > N$  имеет место неравенство  $|z_n - a| < \varepsilon$ . Этот П. сводится к П. последовательностей действительных чисел, т. к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ . Кроме того, по определению,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ .

С помощью понятия П. числовой последовательности определяются многие понятия П. последовательностей, состоящих из элементов более сложной природы. Напр., пусть на множестве  $M$  задана последовательность функций  $\{f_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и функция  $f$ . Говорят, что эта последовательность сходится к  $f$  поточечно, если для любого  $x \in M$  числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходится к числу  $f(x)$ . Говорят, что эта последовательность функций сходится к  $f$  равномерно на  $M$ , если числовая последовательность точных верхних граней  $\{\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходится к нулю.

## Предел функции

Говорят, что функция  $f$ , принимающая действительные значения, имеет в конечной или бесконечно удалённой точке  $x_0$  конечный или бесконечный П.  $a$ , если для любой последовательности

$$\{x_n\}, n = 1, 2, \dots,$$

стремящейся к точке  $x_0$ , числовая последовательность  $\{f(x_n)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , стремится к  $a$ . В этом случае пишут:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ и л и } f(x) \rightarrow a \text{ п р и } x \rightarrow x_0.$$

Здесь предполагается, что все элементы последовательности (2) принадлежат области определения функции  $f$ . Если это множество лежит на действительной оси, то  $x_0$  может быть либо действительным числом, либо одной из бесконечностей  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $\infty$ . Если область определения функции  $f$  лежит в плоскости, в пространстве, вообще говоря,  $m$ -мерном,  $m > 1$ , то  $x_0$  может быть либо точкой этой плоскости, соответственно пространства, либо бесконечно удалённой точкой. П. функции может быть либо числом, либо одной из бесконечностей  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $\infty$ .

Точка  $x_0$ , в которой рассматривается П. функции, может принадлежать или не принадлежать области определения этой функции. Напр.,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . В первом случае функция  $\sin x$  определена для всех действительных значений  $x$ , а во втором — для всех, кроме  $x = 0$ . Если точка  $x_0$  принадлежит области определения функции  $f$ , существует П. (3) и он равен  $f(x_0)$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

то функция  $f$  называется непрерывной в точке  $x_0$ .

Иногда при определении П. (3) функции накладывается дополнительное ограничение

$$x_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots$$

Так, определённое понятие «П.» является частным случаем введённого выше, а именно, соответствующим случаю, когда точка  $x_0$  не принадлежит множеству, на котором рассматривается функция  $f$ .

Определение П. (3) можно сформулировать и в терминах неравенств. Напр., число  $a$  является П. функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , принадлежащих области определения функции  $f$  и удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Всё многообразие разл. случаев, встречающихся при определении П. в терминах неравенств, сводится к одному с помощью понятия окрестности. Существование П. (3) для функции  $f$ , заданной на множестве  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , означает, что для любой окрестности  $V$  точки  $a$  (конечной или бесконечно удалённой) существует такая окрестность  $U$  точки  $x_0$  (конечной или бесконечно удалённой), что из включения  $x \in X \cap U$  следует  $f(x) \in V$ , т. е.  $f(X \cap U) \subset V$ . В случае определения П. с дополнит. условием (4) здесь для получения равносильного определения надо потребовать, чтобы условие  $f(x) \in V$  выполнялось при добавочном ограничении  $x \neq x_0$ .

В данной точке функция может иметь только один конечный или определённого знака бесконечный предел.

Условие существования конечного П. функции в точке даёт критерий Коши: функция  $f$ , заданная на множестве  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , имеет в точке  $x_0$  (конечной или бесконечно удалённой) конечный П., если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая окрестность  $U$  точки  $x_0$ , что как только  $x \in X \cap U$ ,  $x' \in X \cap U$ , то выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Функция, имеющая конечный П. в точке  $x_0$ , локально ограничена, т. е. существует окрестность точки  $x_0$ , на пересечении которой с областью определения функции эта функция ограничена.

В случае существования П. в неравенствах для функций можно переходить к П.: если функции  $f, g, h$  заданы на множестве  $X$ , существуют конечные или определённого знака бесконечные П.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a,$$

и для всех  $x \in X$  выполняются неравенства  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , то существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a.$$

Если существуют конечные П.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

то справедливы равенства, аналогичные тем, что справедливы для П. числовых последовательностей: для любых чисел  $\lambda$  и  $\mu$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \text{ если } g(x) \neq 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

При вычислении П. полезно использовать набор некоторых основных П., напр. следующих:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^a} = 0, a > 0, a \neq 0, \alpha > 0; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

П. композиции функций: если определена сложная функция  $F(f(x))$  и существуют конечные или бесконечные П.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ и } \lim_{y \rightarrow a} F(y) = b,$$

то существует П.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(f(x)) = \lim_{y \rightarrow a} F(y) = b.$$

Определение П. (3) для функций, принимающих действительные значения, переносится на комплекснозначные функции.

Осн. общим методом вычисления П. функций является выделение гл. частей функций в окрестности данной точки, что делается обычно с помощью [Тейлора формулы](#).

Понятие П. функции обобщается и на более широкие классы функций: если функция  $f$  задана на множестве  $X_f$ , являющемся подмножеством топологич. пространства  $X$ , а множество её значений принадлежит топологич. пространству  $Y$  (в этом случае вместо термина «функция» обычно употребляют термин «отображение»), то точка  $a \in Y$  называется П. функции  $f$  при  $x \rightarrow x_0 \in X$ , если для любой окрестности  $V$  точки  $a$  в пространстве  $Y$  существует такая окрестность  $U$  точки  $x_0$  в пространстве  $X$ , что  $f(X \cap U) \subset V$ . Ясно, что определение П. функции содержательно только в том случае, когда точка  $x_0$  является точкой прикосновения множества  $X_f$ , на котором задана функция  $f$ , т. е. когда в любой окрестности этой точки содержится, по крайней мере, одна точка указанного множества.

## Предел интегральных сумм

Предел интегральных сумм, использующийся при определении интеграла, определяется следующим образом. Пусть, напр., функция  $f$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Совокупность  $\{x_j\}_j^n = 0$  таких точек, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , называется разбиением отрезка  $[a, b]$ . Пусть числа  $\xi_j$  таковы, что  $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$  и  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ . Сумма  $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$  называется интегральной суммой функции  $f$ . Число  $A$  является пределом интегральных сумм, называется определённым интегралом и обозначается  $\int_a^b f(x)dx$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что, каково бы ни было разбиение  $\{x_j\}_j^n$  отрезка  $[a, b]$ , для которого  $\max_j \Delta x_j < \delta$ , и каковы бы ни были точки  $\xi_j, x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , выполняется неравенство  $|\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j| < \varepsilon$ . Понятие П. интегральных сумм может быть введено и с помощью П. последовательности.

## Обобщения понятия предела

Ввиду разнообразия употребляемых в математике спец. видов понятия П. естественно возникло стремление включить их как частные случаи в более широкое понятие П. Можно ввести понятие П., обобщающее как П. числовой функции, так и понятие П. интегральных сумм. Система  $S$  непустых подмножеств некоторого множества  $X$  называется направлением, если для каждых двух подмножеств  $A$  и  $B$  этой системы выполняется одно из включений  $A \subset B$  или  $B \subset A$ . Пусть на множестве  $X$  задана числовая функция  $f$ . Число  $a$  называется пределом функции  $f$  по направлению  $S$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое множество  $A$  из  $S$ , что во всех его точках выполняется неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ . При определении конечного П. числовой функции  $f$ , заданной на множестве  $X$   $m$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^m$ , в точке  $x_0$  за направление следует взять пересечения множества  $X$  со всевозможными  $\delta$ -окрестностями этой точки. При определении П. интегральных сумм функции  $f$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , следует рассмотреть множество  $E$ , элементами которого являются всевозможные разбиения отрезка  $[a, b]$  с выбранными в них точками  $\xi_j$ . Подмножества  $E_\eta$  множества  $E$ , отвечающие разбиениям, для которых длины отрезков  $\Delta x_j$  не превышают  $\eta$ , образуют направление. П. интегральных сумм (которые при заданной функции  $f$  являются функциями, определёнными на множестве  $E$ ) по указанному направлению являются интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ .

Понятие П. обобщается на более широкие классы функций, напр. на функции, заданные на частично упорядоченных множествах, или на функции, являющиеся отображениями одного пространства (метрического или, более общо, топологического) в другое. Наиболее полно задача определения П. решается в топологии и

означает в общем случае, что некоторый объект, обозначенный  $f(x)$ , меняющийся при изменении другого объекта, обозначенного  $x$ , при достаточно близком приближении объекта  $x$  к объекту  $x_0$  сколь угодно близко приближается к объекту  $a$ , который и называется пределом  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ . Основным в такого рода понятиях П. являются понятия близости объектов  $x$  и  $x_0$ ,  $f(x)$  и  $a$ , которые нуждаются в строгих определениях. Только после того как это сделано, высказанному определению П. можно придать чёткий смысл и оно станет содержательным. Различные понятия близости и изучаются, в частности, в топологии.

Встречаются, однако, понятия П. и другой природы, не связанные с топологией, напр. понятие П. последовательности множеств. Последовательность множеств  $\{A_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , называется сходящейся, если существует множество  $A$ , называемое её пределом, такое, что каждая его точка принадлежит всем множествам  $A_n$ , начиная с некоторого номера  $n$ , и каждая точка из объединения всех множеств  $A_n$ , не принадлежащая  $A$ , принадлежит лишь конечному числу множеств  $A_n$ .

## Историческая справка

К понятию П. вплотную подошли ещё др.-греч. учёные при вычислении площадей и объёмов некоторых фигур и тел с помощью *исчерпывания метода*. Так, *Архимед*, рассматривая последовательности вписанных и описанных ступенчатых фигур (тел) с помощью метода исчерпывания, доказывал, что разность между их площадями (объёмами) может быть сделана меньше любой наперёд заданной положительной величины. Включая в себя, по существу, представление о бесконечно малых, метод исчерпывания являлся зародышем теории П. Однако в явном виде в др.-греч. математике понятие П. не было сформулировано, не было создано и к.-л. основ общей теории.

Новый этап в развитии понятия П. наступил в эпоху создания дифференциального и интегрального исчисления. *Г. Галилей*, *И. Кеплер*, *Б. Кавальери*, *Б. Паскаль* и др. при вычислении площадей и объёмов широко использовали метод неделимых, метод актуально бесконечно малых, т. е. таких бесконечно малых, которые, по их представлениям, являются неизменными величинами, не равными нулю и вместе с тем меньшими по абсолютной величине любых конечных положительных величин. В этот период продолжает применяться и развиваться метод исчерпывания (швейц. математик П. Гильдин, *Х. Гюйгенс* и др.). На основе интуитивного понятия П. появляются попытки создать общую теорию П. Так, *И. Ньютон* первый отдел первой книги («О движении тел») своего труда «Математические начала натуральной философии» посвятил своеобразной теории П. под назв. «Метод первых и последних отношений», которую он положил в основу своего метода флюксий. В этой теории Ньютон взамен актуально бесконечно малых предложил концепцию «потенциально» бесконечно малой, которая лишь в процессе своего изменения становится по абсолютной величине меньше любой положительной конечной величины. Точка зрения Ньютона была существенным шагом вперёд в развитии представления о П. Понятие о П., наметившееся у математиков 17 в., в следующем 18 в. постепенно анализировалось и уточнялось (*Л. Эйлер*, *Ж. Д'Аламбер*, *Н. Л. С. Карно*, *Я. и И. Бернулли* и др.). В этот период оно служило лишь для попыток объяснить правильность дифференциального и интегрального исчисления и ещё не являлось основой разработки проблем математич. анализа.

Совр. теория П. начала формироваться в нач. 19 в. в связи с изучением свойств разл. классов функций, прежде всего непрерывных, а также в связи с попытками доказательства существования ряда осн. объектов математич. анализа (интегралов, сумм рядов, корней алгебраических и более общих уравнений и т. п.). В работах *О. Коши* понятие П. впервые стало основой построения математич. анализа. Им были установлены осн. свойства существования П., осн. теоремы о П. и, что очень важно, получен внутр. критерий сходимости последовательности, носящий ныне его имя. Наконец, он определил *интеграл* как П. интегральных сумм и изучил его свойства. Окончательно понятие П. последовательности и функции оформилось на базе теории функций действительного переменного в работах *Б. Больцано* и *К. Вейерштрасса*.

## Литература

Лит.: Никольский С. М. Курс математического анализа. 4-е изд. М., 1990. Т. 1; Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2012. Т. 1–3; Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. 4-е изд. М., 2013. Ч. 1.

Processing math: 74%