



ПРОСТЫ́Х ЧИ́СЕЛ РАСПРЕДЕЛÉНИЕ

ПРОСТЫ́Х ЧИ́СЕЛ РАСПРЕДЕЛÉНИЕ, утверждения об асимптотическом поведении функции $\pi(x)$, где $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x , $x \geq 0$, при $x \rightarrow \infty$. Изучение начальных отрезков последовательности простых чисел показывает, что с увеличением x она становится в среднем более редкой. Существуют сколь угодно длинные отрезки последовательности натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа. В то же время встречаются простые числа, разность между которыми равна двум (они называются близнецами). Таблицы простых чисел, меньших 11 миллионов, показывают наличие весьма больших близнецов, такими являются, напр., 10006427 и 10006429. Теорема Евклида (см. [Простое число](#)) утверждает, что $\pi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Л. [Эйлер](#) в 1737 ввёл [дзета-функцию](#) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, и доказал, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$, где суммирование проводится по всем натуральным, а произведение — по всем простым числам. Это тождество и его обобщения играют фундамент. роль в теории распределения простых чисел. Исходя из него, Эйлер доказал, что ряд $\sum \frac{1}{p}$ и произведение $\prod \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1}$ по простым p расходятся, откуда следует теорема Евклида. Более того, Эйлер установил, что простых чисел «много», ибо $\pi(x) > \ln x - 1$, и в то же время почти все натуральные числа являются составными, т. к. $\pi(x)/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

П. Дирихле в 1837, изучая вопрос о бесконечности простых чисел в арифметич. прогрессиях $xn + l$, $n = 0, 1, \dots$, где k, l — взаимно просты, рассмотрел аналог эйлерова произведения $\prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}$, где $\chi(p)$ удовлетворяет условиям: не равна тождественно нулю, периодична с периодом k , и вполне мультипликативна, т. е. $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$ для любых целых n, m . При $s > 0$ справедлив аналог тождества Эйлера $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}$. Ряд слева называется [Дирихле рядом](#). Изучая поведение таких рядов при $s \rightarrow 1 + 0$, Дирихле доказал свою теорему о бесконечности числа простых чисел в арифметич. прогрессиях.

П. Л. Чебышев в 1851–52 доказал, что существуют постоянные a и b , такие, что $a \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\ln x}$, где $\frac{\ln 2}{2} \leq a$ и $b < 2 \ln 2$, и установил, что если существует предел $\frac{\pi(x) \ln x}{x}$ при $x \rightarrow \infty$, то он равен 1. В 1896 Ж. [Адамар](#) и Ш. [Ла Валле Пуссен](#) установили существование этого предела.

Литература

Лит.: Трост Э. Простые числа. М., 1959; Прахар К. Распределение простых чисел. М., 1967; Виноградов И. М. Основы теории чисел. 12-е изд. СПб., 2009.