



ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Авторы: С. А. Теляковский

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ действительного переменного, нахождение для данной функции f функции g из некоторого определённого класса, в том или ином смысле близкой к f , дающей её приближённое представление. Существуют разл. варианты задачи о П. ф., решения которых зависят от того, какие функции приближают, какие функции используются для приближения, как строятся приближающие функции g , как понимается близость f и g .

Для оценки близости функции f и приближающей её функции g используются (в зависимости от рассматриваемой задачи) метрики разл. функциональных пространств. Обычно это метрики пространств непрерывных функций C и пространств L_p , $p \geq 1$, функций, p -я степень которых интегрируема, в которых расстояния между функциями f и g (заданными на отрезке $[a, b]$) определяются формулами $\|f-g\|_C = \max_{x \in [a,b]} |f(x)-g(x)|$ и $\|f-g\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Наиболее часто встречающейся и хорошо изученной является задача о П. ф. многочленами $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$, где $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ – заданные функции, a_0, \dots, a_n – произвольные числа. Обычно это алгебраич. многочлены $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, или тригонометрич. полиномы $g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Рассматриваются также полиномы по *ортogonalным многочленам*, по собств. функциям краевых задач и т. п. Другим классич. средством приближения являются рациональные дроби $P(x)/Q(x)$, где P, Q – алгебраич. многочлены заданной степени.

С 1960-х гг. значит. развитие получило приближение *сплайнами*. Их характерным примером являются кубич. сплайны, определяемые следующим образом. Отрезок $[a, b]$ разбивается точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, и на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ кубич. сплайн является алгебраич. многочленом 3-й степени, причём эти многочлены подбираются так, что на всём отрезке $[a, b]$ непрерывны сам сплайн и его первая и вторая производные. Параметры, оставшиеся свободными, могут быть использованы для того, чтобы сплайн интерполировал в узлах x_k приближаемую функцию. Улучшение приближения достигается за счёт увеличения числа узлов x_k и удачного их расположения на отрезке $[a, b]$. Сплайны оказались удобными в вычислит. математике, с их помощью удалось решить также некоторые задачи теории функций.

Приближённые представления функций, а также сами функции на основе их приближённых представлений изучает теория приближения функций (употребляются также названия «теория аппроксимации функций» и «конструктивная теория функций»). К теории П. ф. обычно относят также задачи о приближении элементов в банаховых и общих метрич. пространствах.

Теория П. ф. берёт начало в работах П. Л. *Чебышева*. Он ввёл одно из осн. понятий – понятие наилучшего приближения полиномами и получил ряд результатов о наилучших приближениях. Наилучшим приближением непрерывной функции $f(x)$ полиномами $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ в метрике $(*)$ называется величина $E_n(f)_C = \min \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|_C$, где минимум берётся по всем числам a_0, \dots, a_n . Полином, на котором этот минимум достигается, называется полиномом наилучшего приближения (для др.

метрик определения аналогичны). Чебышев установил, что наилучшее П. ф. x^{n+1} на отрезке $[-1, 1]$ в метрике $(*)$ алгебраич. многочленами степени n равно 2^{-n} , а многочлен наилучшего приближения таков, что для него $x^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k x^k = 2^{-n} \cos(n+1) \arccos x$. Следующая теорема Чебышева указывает характеристич. свойство полиномов наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций: алгебраич. многочлен $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ является полиномом наилучшего приближения непрерывной функции f в метрике $(*)$ в том и только в том случае, когда существуют $n+2$ точки $a \leq x_1 < \dots < x_{n+2} \leq b$, в которых разность $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k$ принимает макс. значение своего модуля с последовательно чередующимися знаками.

Одним из первых результатов теории приближений является также теорема Вейерштрасса, согласно которой каждую непрерывную функцию можно приблизить в метрике $(*)$ сколь угодно хорошо алгебраич. многочленами достаточно высокой степени.

С нач. 20 в. началось систематич. исследование поведения при $n \rightarrow \infty$ последовательности $E_n(f)$ наилучших П. ф. f алгебраич. или тригонометрич. многочленами. С одной стороны, выясняется скорость стремления к нулю при росте n величин $E_n(f)$ в зависимости от дифференциальных свойств функции f (т. н. прямые теоремы теории приближений), а с другой – изучаются свойства функции f по последовательности её наилучших приближений (обратные теоремы теории приближений). В ряде важных случаев здесь получена полная характеристика свойств функции. Ниже приведены две такие теоремы.

Для того чтобы функция f была аналитической на отрезке (т. е. в каждой точке этого отрезка представлялась степенным рядом, равномерно сходящимся к ней в некоторой окрестности этой точки), необходимо и достаточно, чтобы для последовательности её наилучших приближений алгебраич. многочленами были справедливы оценки $E_n(f) \leq Aq^n$, где $q < 1$ и A – некоторые положительные числа, не зависящие от n (теорема Бернштейна).

Для того чтобы функция f периода 2π имела производную порядка r , $r=0, 1, \dots$, удовлетворяющую условию $|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| \leq M|h|^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$, M – некоторое положительное число) или условию $|f^{(r)}(x)+f^{(r)}(x-h) - 2f^{(r)}(x)| \leq M|h|$ (M – некоторое положительное число), необходимо и достаточно, чтобы для наилучших П. ф. f тригонометрич. полиномами были справедливы оценки $E_n(f) \leq A/n^{r+\alpha}$, где A – некоторое положительное число, не зависящее от n . В этом утверждении прямая теорема была в осн. доказана амер. математиком Д. Джексоном, а обратная является результатом исследований С. Н. [Бернштейна](#), Ш. де [Ла Валле Пуссена](#) и амер. математика А. Зигмунда. Характеристика подобных классов функций, заданных на отрезке, в терминах наилучших приближений алгебраич. многочленами оказалась невозможной. Её удалось получить, рассматривая П. ф. с улучшением порядка приближения вблизи концов отрезка.

Возможность характеризовать классы функций с помощью их приближений полиномами нашла приложение в ряде общих вопросов математич. анализа. Развивая исследования по наилучшим П. ф. многих переменных полиномами, С. М. [Никольский](#) построил теорию вложений важных для анализа классов дифференцируемых функций мн. переменных, в которой справедливы не только прямые, но и полностью обращающие их обратные теоремы.

Для приближений в пространстве L_2 полином наилучшего приближения может быть легко построен. Для др. пространств нахождение полиномов наилучшего приближения является трудной задачей, и её удаётся решить только в отд. случаях. Это привело к разработке разного рода алгоритмов для приближённого нахождения

полиномов наилучшего приближения.

Трудность нахождения полиномов наилучшего приближения отчасти объясняется тем, что оператор, сопоставляющий функции её полином наилучшего приближения, не является линейным: полином наилучшего приближения для суммы $f+u$ не обязательно равен сумме полиномов наилучшего П. ф. f и u . Поэтому возникла задача изучения (по возможности простых) линейных операторов, сопоставляющих каждой функции полином, дающий хорошее приближение. Напр., для периодич. функции $f(x)$ можно брать частные суммы её [Фурье ряда](#) по тригонометрич. системе $S_n(f, x)$. При этом справедлива оценка (теорема Лебега) $\left| S_n(f, x) - f(x) \right| \leq C(L_n + 1)E_n(f)$, где L_n – числа, растущие при росте n как $(4/\pi^2)\ln n$, – т. н. константы Лебега. Эта оценка показывает, что полиномы $S_n(f, x)$ доставляют приближение, не очень сильно отличающееся от наилучшего.

Важный пример линейного оператора, используемого при П. ф., даёт [интерполяция](#) функций, когда требуется, чтобы в определённых точках (узлах интерполирования) совпадали значения функции и приближающего её полинома, а в более общем случае – и значения некоторых их производных. Оценка, подобная теореме Лебега, справедлива и для приближений интерполяционными тригонометрич. полиномами с равноотстоящими узлами интерполирования, а также для приближений интерполяционными алгебраич. многочленами на отрезке $[-1, 1]$ с узлами $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k=1, 2, \dots, n$, т. е. в точках, где полином Чебышева $T_n(\arccos x)$ обращается в нуль.

Для большинства встречающихся в анализе классов функций известны такие линейные операторы, построенные с помощью рядов Фурье или на основе интерполяционных полиномов, что значениями этих операторов являются полиномы, дающие на классе тот же порядок убывания приближений при $n \rightarrow \infty$, что и наилучшие приближения.

А. Н. [Колмогоров](#) начал изучение нового вопроса теории приближений – задачи о нахождении при фиксированном n такой системы функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, для которой наилучшие П. ф. заданного класса полиномами $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ были бы наименьшими (задача о поперечнике класса функций). В этом направлении в дальнейшем было выяснено, напр., что для ряда важных классов периодич. функций наилучшими в указанном смысле системами являются тригонометрич. полиномы.

Теория П. ф. – одно из наиболее интенсивно разрабатываемых направлений в теории функций. Идеи и методы теории приближений являются отправной точкой исследования в ряде вопросов вычислит. математики.

Литература

Лит.: Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. М., 1965; Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М., 1976; Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976; Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977; Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М., 1977.