ПОЧТИ́ ПЕРИОДИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ

ПОЧТИ́ ПЕРИОДИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ, функция, значения которой при добавлении к аргументу надлежащим образом выбранных постоянных (почти периодов) приближённо повторяются. Точнее, непрерывная функция $f(x)$, определённая для всех действительных значений x, называется почти периодической, если для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $l=l(\varepsilon)$, что в каждом интервале действительной оси длины l найдётся хотя бы одно число $\tau=\tau(\varepsilon)$, для которого при любом x выполняется неравенство $|f(x+\tau)-f(x)| \lt \varepsilon$. Числа τ называются почти периодами функции $f(x)$. *Периодические функции* суть частные случаи П. п. ф.; простейшие примеры П. п. ф., не являющихся периодическими, получаются в результате сложения периодич. функций с несравнимыми периодами, напр., $\cos x+\cos\sqrt{2x}$ есть почти периодическая функция.

Некоторые важные свойства П. п. ф.:

1. П. п. ф. ограничена и равномерно непрерывна на всей действительной оси.

2. Сумма и произведение конечного числа П. п. ф. также являются почти периодической функцией.

3. Предел равномерно сходящейся последовательности П. п. ф. также есть почти периодическая функция.

4. Для каждой П. п. ф. существует среднее значение на всей действительной оси $M\{f\}=\lim_{T\rightarrow\infty}\int\limits_{-T}^{T}f(x)dx$.

5. Каждой П. п. ф. можно сопоставить её ряд Фурье $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{i\lambda_nx}$, причём $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ может быть любой последовательностью отличных друг от друга действительных чисел и $A_n=M\{f(x)e^{-i\lambda_nx}\}$.

6. Для каждой П. п. ф. справедливо равенство Парсеваля $M\{\left | f \right | ^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left |A_n \right |^2$.

7. Справедлива теорема единственности: если $f(x)$ – П. п. ф. и для всех действительных λ $M\left\{ f(x)e^{-i\lambda x} \right\}=0$, то $f(x)\equiv 0$; иначе говоря, ряд Фурье однозначно определяет почти периодическую функцию.

8. Справедлива теорема аппроксимации: если $f(x)$ – П. п. ф., то для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такой конечный тригонометрич. полином $P_\varepsilon(x)=\sum\limits^N_{k=1} b_ke^{-i\mu_kx}$, где μ_k – действительные числа, что для всех значений x выполняется неравенство $\left | f(x)-P_\varepsilon(x) \right | \lt \varepsilon$; обратно, каждая функция $f(x)$, обладающая этим свойством, является почти периодической функцией.

Первое построение теории П. п. ф. было дано Х. *Бором* (1925). Ещё ранее (1893) частный случай П. п. ф. – т. н. квазипериодич. функции, изучал латв. математик П. Боль.

Литература

Лит.: Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., 1953; Бор Г. Почти периодические функции. М., 2009.