



ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОД

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОД (метод повторных подстановок, метод простой итерации), один из общих методов приближённого решения уравнений. В ряде случаев хорошая сходимость построенных этим методом приближений позволяет применять его в практике вычислений.

Пусть

E — некоторое множество, на котором задан оператор

A , отображающий

E в себя. Требуется найти неподвижную точку этого оператора, т. е. решение уравнения

$$Ax = x, x \in E.$$

Пусть это уравнение имеет решение

x_* и указано к.-л. его начальное приближение

$x_0 \in E$. С помощью рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

определяется последовательность

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Построение этой последовательности и исследование вопроса о её сходимости обычно называют методом последовательных приближений.

Для исследования сходимости последовательности (2), а также для доказательства существования решения уравнения (1) широко применяется сформулированный ниже принцип сжимающих отображений.

Если

E — полное [метрическое пространство](#) с метрикой

ρ и для всех

$x,$

$y \in E$

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y), \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1,$$

то уравнение (1) имеет единственное решение, которое является пределом последовательных приближений (2) при любом начальном приближении

x_0 . Для приближения

x_n верна следующая оценка его близости к решению

x_* :

$$\rho(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(Ax_0, x_0).$$

Пусть, напр.,

$$E = \mathbb{R}^n -$$

n -мерное пространство и оператор

A в (1) имеет вид

$$Ax = Bx + c, \text{ где}$$

$B = \|b_{ik}\|$ – квадратная матрица

n -го порядка,

$c = (c_1, \dots, c_n)$ – заданный, а

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – искомый векторы в

\mathbb{R}^n . Если в этом пространстве метрика определена формулой

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad \text{и элементы матрицы}$$

B удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^n |b_{ik}| < 1 \text{ для всех}$$

$i = 1, \dots, n$, то из принципа сжимающих отображений следует, что система алгебраич. уравнений (1) имеет в

\mathbb{R}^n единственное решение, которое можно вычислить со сколь угодно высокой точностью, исходя из

произвольного вектора

$$x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Processing math: 100%