



# ПО́ЛЕ

ПО́ЛЕ в математике, алгебраич. понятие, широко используемое во многих разделах математики. П. составляют особый класс колец (см. [Кольцо теории](#)).

П. может быть определено как множество, содержащее не менее двух элементов, на котором заданы две бинарные алгебраич. операции – сложение и умножение, обе ассоциативные и коммутативные, связанные между собою законом дистрибутивности, т. е. для любых

$a, b, c$  из П. справедливы равенства

$$a + b = b + a, ab = ba, (a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc), (a + b)c = ac + bc.$$

Кроме того, в П. требуется существование нулевого элемента 0 (нуля), для которого

$0 + a = a$ , и для каждого элемента

$a$  противоположного элемента

$-a$ , т. е. такого элемента, что

$a + (-a) = 0$ , а также существование единичного элемента

$e$  (единицы), для которого

$ae = a$ , и для каждого ненулевого элемента

$a$  существование обратного элемента

$a^{-1}$ , т. е. такого элемента, что

$aa^{-1} = e$ . Отсюда следует, что в П. выполняются операции вычитания, а также операция деления на ненулевой элемент. Т. о., все элементы П. образуют коммутативную группу по сложению (аддитивная группа П.), а все ненулевые элементы – коммутативную группу по умножению (мультипликативная группа П.).

Примерами П. (относительно естественных операций сложения и умножения) являются: 1. Множество всех рациональных чисел

Q. 2. Множество всех действительных чисел

R. 3. Множество всех комплексных чисел

C. 4. Множество всех рациональных функций от одного или нескольких переменных с действительными коэффициентами (а также с коэффициентами из произвольного П.). 5. Множество всех чисел вида

$$a + b\sqrt{2}, \text{ где}$$

$a, b$  – рациональные числа. 6. Пусть

$p$  – простое число. Множество целых чисел можно разбить на классы, объединив в один класс все числа, дающие при делении на

$p$  один и тот же остаток. В двух классах можно взять по представителю и сложить их; тот класс, в который попадёт эта сумма, называют суммой классов. Аналогично определяется произведение. При таком определении сложения и умножения все классы образуют П., оно состоит из

$p$  элементов и называется П. вычетов по модулю

$p$ .

Может оказаться, что в  $P$ . равно нулю целое кратное

$na$  какого-либо отличного от нуля элемента

$a$ . В этом случае существует такое простое число

$p$ , что

$p$ -кратное любого элемента этого  $P$ . равно нулю. Говорят, что в этом случае характеристика  $P$ . равна

$p$  (таково  $P$ . из примера 6). Если же

$na \neq 0$  ни для каких ненулевых

$n$  и

$a$ , то характеристика  $P$ . считается равной нулю (таковы  $P$ . примеров 1–5).

Если часть

$F$  элементов  $P$ .

$G$  сама образует  $P$ . относительно тех же операций сложения и умножения, то

$F$  называется подполем  $P$ .

$G$ , а

$G$  надполем или расширением поля

$F$ .  $P$ ., не имеющее подполей, называется простым. Все простые поля исчерпываются  $P$ . примеров 1 и 6 (при всевозможных выборах простого числа

$p$ ). Всякое  $P$ . содержит единственное простое подполе ( $P$ . примеров 2–5 содержат  $P$ . рациональных чисел). Одна из задач теории  $P$ . состоит в том, чтобы, отправляясь от простого  $P$ ., получить описание всех  $P$ ., изучив структуру расширений.

Некоторые расширения имеют сравнительно простое строение. Это – а) простые трансцендентные расширения, которые сводятся к тому, что в качестве  $P$ .

$G$  берётся  $P$ . всех рациональных функций от одного переменного с коэффициентами из

$F$ , и б) простые алгебраич. расширения (пример 5), которые получаются, если совокупность

$G$  всех многочленов степени

$n$  складывать и умножать по модулю данного неприводимого над

$F$  многочлена

$f(x)$  степени

$n$  (конструкция, аналогичная примеру 6). Расширения второго типа сводятся к тому, что к

$F$  добавляется корень многочлена

$f(x)$  и все элементы, которые можно выразить через этот корень и элементы

$F$ ; каждый элемент надполя

$G$  является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из

$F$ . Расширения, обладающие последним свойством, называются алгебраическими. Любое расширение можно выполнить в два приёма: сначала сделать трансцендентное расширение (образовав  $P$ . рациональных функций, не обязательно от одной переменной), а затем алгебраическое (теорема Штейница). Алгебраич. расширений не имеют только такие  $P$ ., в которых каждый многочлен разлагается на линейные множители. Такие  $P$ . называются алгебраически замкнутыми.  $P$ . комплексных чисел является алгебраически замкнутым (основная теорема

алгебры). Любое  $\mathbb{P}$  можно включить в качестве подполя в алгебраически замкнутое.

Некоторые специальные поля были детально изучены. В теории алгебраич. чисел рассматриваются гл. обр. простые алгебраич. расширения  $\mathbb{P}$  рациональных чисел. В теории алгебраич. функций исследуются простые алгебраич. расширения  $\mathbb{P}$  рациональных функций с комплексными коэффициентами; значит. внимание уделяется конечным расширениям  $\mathbb{P}$  рациональных функций над произвольным  $\mathbb{P}$  констант (т. е. с произвольными коэффициентами). Конечные расширения  $\mathbb{P}$ , в особенности их автоморфизмы (см.

[\*Изоморфизм\*](#)), изучаются в [\*Галуа теории\*](#); здесь находят ответы на многие вопросы, возникающие при решении алгебраич. уравнений. Во многих вопросах алгебры, особенно в разл. разделах теории  $\mathbb{P}$ , большую роль играют т. н. нормированные поля. В связи с геометрич. исследованиями появились и изучались упорядоченные поля.

## Литература

Лит.: Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. М., 1963. Т. 1–2; Ленг С. Алгебра. М., 1968; Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. 2-е изд. М., 1979.

Processing math: 100%