



# ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Авторы: А. Б. Иванов

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, множества точек 3-мерного пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Это уравнение может и не определять действительного геометрич. образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую П. в. п. Существует прямоугольная система координат, в которой уравнение (\*) приводится к одному из следующих канонич. видов, каждому из которых соответствует определённый класс поверхности второго порядка.

## Нераспадающиеся поверхности

Невырождающиеся:

эллиптические

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  — эллипсоид,

2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  — мнимый эллипсоид;

гиперболические

3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  — однополостный гиперболоид,

4.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  — двуполостный гиперболоид;

параболические ( $p > 0, q > 0$ )

5.  $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$  — эллиптич. параболоид,

6.  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$  — гиперболич. параболоид.

Вырождающиеся:

цилиндрические

7.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  — эллиптич. цилиндр,

8.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  — мнимый эллиптич. цилиндр,

9.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  — гиперболич. цилиндр,

10.  $y^2 = 2px$  — параболич. цилиндр;

конические

11.  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$  – конус,
12.  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$  – мнимый конус.

## Распадающиеся вырождающиеся поверхности

13.  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$  – пара пересекающихся плоскостей,
14.  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$  – пара мнимых пересекающихся плоскостей,
15.  $x^2=a^2$  – пара параллельных плоскостей,
16.  $x^2=-a^2$  – пара мнимых параллельных плоскостей,
17.  $x^2=0$  – пара совпадающих плоскостей.

П. в. п., имеющая единственный центр симметрии (центр П. в. п.), называется центральной П. в. п.; без центра симметрии или с неопределённым центром – нецентральной поверхностью второго порядка.

Среди П. в. п., содержащих хотя бы одну точку, ограниченными являются лишь эллиптические, все остальные неограниченные. Пересечения П. в. п. с плоскостью являются линиями второго порядка.

Исследование вида П. в. п. может быть проведено (таблицы 1 и 2) без приведения уравнения (\*) к канонич. виду с помощью т. н. инвариантов П. в. п., составленных из коэффициентов этого уравнения. Основные инварианты:  $S=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ ,  $T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$ .

Таблица 1. Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам				
		Невырождающиеся поверхности		Вырождающиеся поверхности
		$\Delta > 0$	$\Delta \leq 0$	$\Delta = 0$
Центральные поверхности $\Delta \neq 0$	$\Delta S > 0, T > 0$	Мнимый эллипсоид	Эллипсоид	Мнимый конус
	$\Delta S \leq 0$ и(или) $T \leq 0$	Однополостный гиперболоид	Двуполостный гиперболоид	Действительный конус
Нецентральные поверхности $\Delta = 0$		Гиперболический параболоид	Эллиптический параболоид	Цилиндрические и распадающиеся поверхности (см. табл. 2)

Таблица 2. Цилиндрические и распадающиеся поверхности второго порядка ( $\Delta=0, \Delta'=0$ )			
$T > 0$	Цилиндрические поверхности $\Delta' \neq 0$	Распадающиеся поверхности $\Delta' = 0$	
	Эллиптический цилиндр	Пара мнимых пересекающихся	

	Мнимый $\Delta' > 0$	Действительный $\Delta' \leq 0$	плоскостей	
$T \neq 0$	Гиперболический цилиндр		Пара пересекающихся плоскостей	
$T = 0$	Параболический цилиндр		Пара мнимых параллельных плоскостей $\Delta'' > 0$	Пара совпадающих плоскостей $\Delta'' = 0$
			Пара параллельных плоской $\Delta'' \leq 0$	

Их значения не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат. Используются также семиинварианты (полуинварианты)  $\Delta'$  и  $\Delta''$ , которые являются инвариантами относительно поворота системы координат: $\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33}$ , где  $\Delta_{ij}$  – алгебраич. дополнение элемента  $a_{ij}$  в  $\Delta$ ;  $\Delta''=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$ .Их значения не меняются при повороте осей координат. Инварианты П. в. п. определяют П. в. п. с точностью до движений евклидова пространства. Любые две нераспадающиеся П. в. п., инварианты которых соответственно равны, эквивалентны по отношению к группе движения пространства, т. е. могут быть совмещены движением.

По отношению к более широкой, чем группа движений, группе аффинных преобразований эквивалентными являются П. в. п., канонич. уравнения которых совпадают; имеется 17 аффинно эквивалентных классов, канонич. уравнения которых получаются из уравнений 1–17 при  $a=b=c=1$  и  $2p=2q=1$ .

В проективной геометрии эквивалентными являются П. в. п., которые могут быть переведены друг в друга при проективных преобразованиях (группа которых шире, чем группа аффинных преобразований). Имеется 8 проективно эквивалентных классов, т. е. между некоторыми аффинными классами имеется проективная общность. Это связано с тем, что при проективных преобразованиях исчезает особая роль бесконечно удалённых элементов пространства. Напр., эллипсоид и двуполостный гиперболоид, различные с аффинной точки зрения, принадлежат одному проективному классу поверхностей второго порядка.

П. в. п. впервые представлены уравнениями 2-й степени у Л.[Эйлера](#) (1748), совр. названия невырожденных П. в. п. даны Г. [Монжем](#) (1801).

### Литература

Лит.: Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. 13-е изд. М., 2006;Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. 2-е изд. М., 2008.