ПЛО́ЩАДЬ

ПЛО́ЩАДЬ, одна из количественных характеристик, связанных с геометрич. фигурами. В простейших случаях измеряется числом заполняющих плоскую фигуру единичных квадратов, т. е. квадратов со стороной, равной единице длины.

Вычисление П. уже в древности было одной из важнейших задач практич. геометрии, что связано с измерением земельных участков. За неск. столетий до н. э. греч. учёные располагали точными правилами вычисления П., которые в *«Началах» Евклида* облечены в форму теорем. При этом П. многоугольников определялись теми же приёмами разложения и дополнения фигур, которые сохранились в школьном преподавании. Для вычисления П. фигур с криволинейными границами применялся предельный переход в форме *исчерпывания метода*.

Теория П. плоских фигур, ограниченных простыми (т. е. не пересекающими себя) контурами, может быть построена следующим образом. Рассматриваются всевозможные многоугольники, вписанные в данную фигуру F, и всевозможные многоугольники, описанные вокруг фигуры F. (Вычисление П. многоугольника не представляет труда.) Пусть $\{s\}$ – множество чисел, которые суть П. вписанных в фигуру многоугольников, а $\{S\}$ – множество чисел, которые суть П. описанных вокруг фигуры многоугольников. Множество $\{s\}$ ограничено сверху (площадью любого описанного многоугольника), а множество $\{S\}$ ограничено снизу (напр., числом нуль). Наименьшее из чисел $\underline{S}$, ограничивающее сверху множество $\{S\}$, называется нижней П. фигуры F, а наибольшее из чисел $\bar{S}$, ограничивающее снизу множество $\{S\}$, называется верхней П. фигуры F. Если верхняя П. фигуры совпадает с её нижней П., то число $S=\bar{S}=\underline{S}$ называется площадью фигуры, а сама F квадрируемой фигурой. Для того чтобы плоская фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такой описанный вокруг фигуры многоугольник и такой вписанный в фигуру многоугольник, разность $S-s$ площадей которых была бы меньше ε.

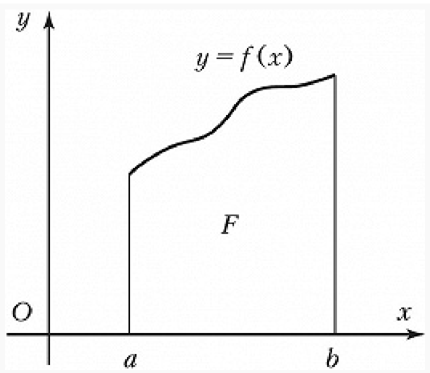

Рис. 1.

Аналитически П. плоской фигуры может быть вычислена с помощью интеграла. Пусть фигура F – т. н. криволинейная трапеция (рис. 1) – ограничена графиком заданной на отрезке $[a, b]$ непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox. П. такой фигуры может быть выражена интегралом $S=\int\limits_a^b f(x)dx$. П. фигуры, ограниченной замкнутым контуром, который встречается с каждой прямой, параллельной к оси Oy, не более чем в двух точках, может быть вычислена как разность П. двух криволинейных трапеций. П. фигуры может быть выражена в виде двойного интеграла $S=\iint\limits_F dxdy$, где интегрирование ведётся по части плоскости, занятой фигурой.

Теория П. фигур, расположенных на кривой поверхности, может быть построена следующим образом. Пусть F – односвязная фигура на гладкой поверхности, ограниченная кусочно гладким контуром. Фигура F разбивается

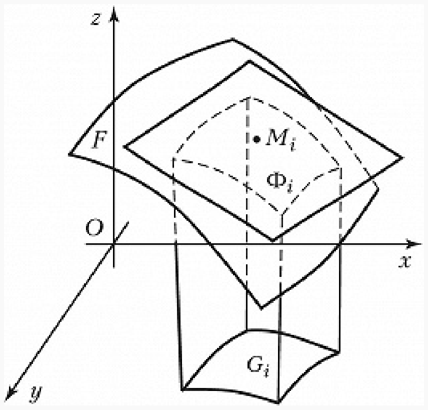

Рис. 2.

кусочно гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, каждая из которых однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через точку $M_i\in\Phi_i$ (рис. 2). Предел сумм площадей этих проекций (если он существует), взятых по всем элементам разбиения, при условиях, что он существует и не зависит от выбора точек M_i, называется площадью фигуры F, а сама F называется квадрируемой. Аналитически П. фигуры F на поверхности, заданной уравнением $z=f(x, y)$, может быть выражена интегралом $S=\iint\limits_G\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dxdy$, где G – замкнутая область, являющаяся проекцией F на плоскость Oxy.

В Междунар. системе единиц (СИ) П. измеряется в м^2.

Об обобщении понятия П. см. в ст. *Мера множества*.

Литература

Лит.: Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 3 т. 7-е изд. М., 2008.