

ПЛОЩАДЬ

ПЛОЩАДЬ, одна из количественных характеристик, связанных с геометрич. фигурами. В простейших случаях измеряется числом заполняющих плоскую фигуру единичных квадратов, т. е. квадратов со стороной, равной единице длины.

Вычисление П. уже в древности было одной из важнейших задач практич. геометрии, что связано с измерением земельных участков. За неск. столетий до н. э. греч. учёные располагали точными правилами вычисления П., которые в *«Началах» Евклида* облечены в форму теорем. При этом П. многоугольников определялись теми же приёмами разложения и дополнения фигур, которые сохранились в школьном преподавании. Для вычисления П. фигур с криволинейными границами применялся предельный переход в форме *исчерпывания метода*.

Теория П. плоских фигур, ограниченных простыми (т. е. не пересекающими себя) контурами, может быть построена следующим образом. Рассматриваются всевозможные многоугольники, вписанные в данную фигуру F , и всевозможные многоугольники, описанные вокруг фигуры F . (Вычисление П. многоугольника не представляет труда.) Пусть $\{s\}$ – множество чисел, которые суть П. вписанных в фигуру многоугольников, а $\{S\}$ – множество чисел, которые суть П. описанных вокруг фигуры многоугольников. Множество $\{s\}$ ограничено сверху (площадью любого описанного многоугольника), а множество $\{S\}$ ограничено снизу (напр., числом нуля). Наименьшее из чисел \underline{S} , ограничивающее сверху множество $\{S\}$, называется нижней П. фигуры F , а наибольшее из чисел \overline{S} , ограничивающее снизу множество $\{S\}$, называется верхней П. фигуры F . Если верхняя П. фигуры совпадает с её нижней П., то число $S = \overline{S} = \underline{S}$ называется площадью фигуры, а сама F квадратуемой фигурой. Для того чтобы плоская фигура была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такой описанный вокруг фигуры многоугольник и такой вписанный в фигуру многоугольник, разность $S - s$ площадей которых была бы меньше ε .

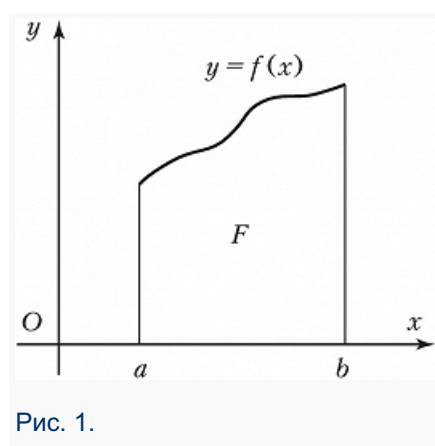


Рис. 1.

Аналитически П. плоской фигуры может быть вычислена с помощью интеграла. Пусть фигура F – т. н. криволинейная трапеция (рис. 1) – ограничена графиком заданной на отрезке $[a, b]$ непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox . П. такой фигуры может быть выражена интегралом $S = \int_a^b f(x) dx$. П. фигуры, ограниченной замкнутым контуром, который встречается с каждой прямой, параллельной к оси Oy , не более чем в двух точках, может быть вычислена как разность П. двух криволинейных трапеций. П. фигуры может быть выражена в виде двойного интеграла $S = \iint_F dx dy$, где интегрирование ведётся по части плоскости, занятой фигурой.

Теория П. фигур, расположенных на кривой поверхности, может быть построена следующим образом. Пусть F – односвязная фигура на гладкой поверхности, ограниченная кусочно гладким контуром. Фигура F разбивается кусочно гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i , каждая из которых однозначно проектируется на

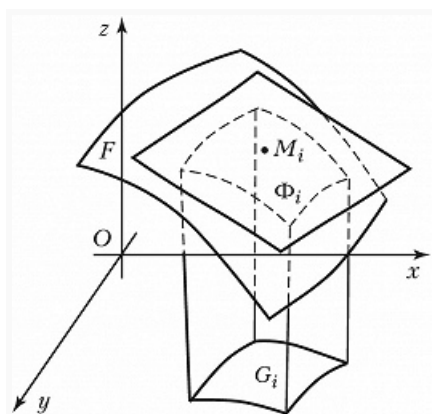


Рис. 2.

касательную плоскость, проходящую через точку $M_i \in \Phi_i$ (рис. 2). Предел сумм площадей этих проекций (если он существует), взятых по всем элементам разбиения, при условиях, что он существует и не зависит от выбора точек M_i , называется площадью фигуры F , а сама F называется кватрируемой. Аналитически П. фигуры F на поверхности, заданной уравнением $z=f(x, y)$, может быть выражена интегралом $S=\iint\limits_G\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dxdy$, где G – замкнутая область, являющаяся проекцией F на плоскость Oxy .

В Междунар. системе единиц (СИ) П. измеряется в m^2 .

Об обобщении понятия П. см. в ст. [Мера множества](#).

Литература

Лит.: Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 3 т. 7-е изд. М., 2008.

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/fontdata.js