



# ПЕРЕВА́ЛА МЕ́ТОД

ПЕРЕВА́ЛА МЕ́ТОД, метод нахождения асимптотических выражений некоторых интегралов. Многие спец. функции выражаются интегралами вида

$$\int_C e^{zf(\tau)} d\tau, \quad ( * )$$

где

$f(\tau) = u(x, y) + iv(x, y)$  — аналитич. функция от

$\tau = x + iy$  такая, что

$u(x, y)$  стремится к

$-\infty$  при приближении к концам контура

$C$ . Для вычисления этих интегралов при больших положительных значениях

$z$  применяется П. м. Он состоит в том, что контур

$C$  деформируется в контур

$C'$ , имеющий те же концы, что и

$C$ , и проходящий через нуль

$\tau_0$  функции

$f'(\tau)$  по кривой вида

$v(x, y) = \text{const}$  (по теореме Коши значение интеграла не меняется при деформации контура). На поверхности

$t = u(x, y)$  контур

$C'$  изобразится путём, проходящим через точку перевала этой поверхности (отсюда назв. метода) так, что по обе стороны этой точки путь как можно круче спускается к большим отрицательным значениям

$u(x, y)$ . Поэтому при действительном положительном

$z$  существенное влияние на значение интеграла

( $*$ ) оказывает лишь ближайшая окрестность точки

$\tau_0$ , и это обстоятельство может быть использовано для получения асимптотич. выражений интеграла, напр., заменой функции

$f(\tau)$  в окрестности точки

$\tau_0$  отрезком её ряда Тейлора.

Так, если

$f(\tau) = \ln \tau - \tau$ ,  $-\pi < \arg \tau \leq \pi$ , и контур

$C$  соединяет точки

$\tau = 0$  и

$\tau = \infty$ , то

$\tau_0 = 1$  и интегрировать следует по действит. положительной полуоси, причём

$$\int_0^\infty e^{z(\ln \tau - \tau)} d\tau = \int_0^\infty \exp z \left( -1 - \frac{1}{2}(1 - \tau)^2 - \frac{1}{3}(1 - \tau)^3 - \dots \right) d\tau.$$

$$\int_0^{\infty} e^{z(\ln \tau - \tau)} d\tau = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z}.$$

Отсюда, ограничиваясь окрестностью

$0 < \tau < 2$  точки

$\tau_0 = 1$  и полагая

$\sqrt{z}(1 - \tau) = \sigma$ , находят асимптотич. выражение (при

$z \rightarrow \infty$ )

$$\int_0^{\infty} e^{z(\ln \tau - \tau)} d\tau \sim \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z}.$$

П. м., как правило, даёт возможность найти весь асимптотич. ряд для интеграла

( \* ).

## Литература

Лит.: Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. 3-е изд. М., 1979; Федорюк М. В. Метод перевала. 2-е изд. М., 2009.

Processing math: 100%