



# ОШИБОК ТЕОРИЯ

Авторы: Л. Н. Большев

**ОШИБОК ТЕОРИЯ**, раздел математической статистики, посвящённый построению выводов о численных значениях приближённо измеренных величин и об ошибках (погрешностях) измерений. Повторные измерения одной и той же постоянной величины дают, как правило, разл. результаты, т. к. каждое измерение содержит некоторую ошибку. Различают три осн. вида ошибок: систематич., грубые и случайные. Систематич. ошибки постоянно либо преувеличивают, либо преуменьшают результаты измерений и происходят от определённых причин (неправильной установки измерит. приборов, влияния окружающей среды и т. д.), систематически влияющих на результаты измерений и изменяющих их в одном направлении. Оценка систематич. ошибок производится с помощью методов, выходящих за пределы математич. статистики. Напр., в астрономии при измерении величины угла между направлением на светило и плоскостью горизонта систематич. ошибка является суммой двух ошибок: систематич. ошибки, которую даёт прибор при отсчёте данного угла (инструментальная ошибка) и систематич. ошибки, обусловленной преломлением лучей света в атмосфере (рефракция). Инструментальная ошибка учитывается с помощью таблицы или графика поправок для данного прибора; ошибку, связанную с рефракцией (для углов, меньших  $80^\circ$ ), можно достаточно точно вычислить теоретически. Грубые ошибки возникают в результате просчёта, неправильного чтения показаний измерительного прибора и т. п. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, как правило, сильно отличаются от др. результатов измерений и поэтому часто бывают хорошо заметны. Случайные ошибки происходят от разл. случайных причин, действующих при каждом из отд. измерений непредсказуемым образом то в сторону уменьшения, то в сторону увеличения результата.

О. т. занимается изучением лишь случайных и грубых ошибок. Осн. задачи О. т.: определение законов распределения случайных ошибок, построение статистич. оценок неизвестных величин по результатам измерений, вычисление погрешностей таких оценок и устранение грубых ошибок.

Пусть в результате  $n$  независимых измерений некоторой неизвестной величины  $\mu$  получены значения  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Разности  $\delta_1 = X_1 - \mu, \delta_2 = X_2 - \mu, \dots, \delta_n = X_n - \mu$  называются истинными ошибками; в терминах вероятностной О. т. все  $\delta_i$  рассматриваются как случайные величины, независимость измерений понимается как взаимная независимость случайных величин  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . При этом измерения называются равноточными (в широком смысле), если эти величины имеют одно и то же распределение. Таким образом, истинные ошибки равноточных измерений суть независимые одинаково распределённые случайные величины. При этом математич. ожидание истинных ошибок  $b = \text{E} \delta_1 = \dots = \text{E} \delta_n$  называется систематич. ошибкой, а разности  $\delta_1 - b, \dots, \delta_n - b$  — случайными ошибками. Отсутствие систематич. ошибки означает, что  $b = 0$ , в этом случае  $\delta_1, \dots, \delta_n$  суть случайные ошибки. Величину  $1/(\sqrt{2}\sigma)$ , где  $\sigma$  — квадратичное отклонение ошибок  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , называют мерой точности (при наличии систематич. ошибки мера точности есть  $1/\sqrt{2(b^2 + \sigma^2)}$ ). Равноточность измерений в узком смысле понимается как одинаковость

меры точности всех результатов измерений. Наличие грубых ошибок означает нарушение равноточности (как в широком, так и в узком смысле) для некоторых отд. измерений.

В качестве оценки неизвестной величины  $\mu$  обычно берут арифметич. среднее из результатов измерений  $X_1, \dots, X_n$ :  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , а разности  $\Delta_1 = X_1 - \overline{X}, \dots, \Delta_n = \overline{X} - X$  называются кажущимися ошибками. Выбор  $\overline{X}$  в качестве оценки для  $\mu$  основан на том, что при достаточно большом числе  $n$  равноточных измерений, лишённых систематич. ошибки, оценка  $\overline{X}$  с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от неизвестной величины  $\mu$  (это связано с [большим числом закон](#)); оценка  $\overline{X}$  лишена систематич. ошибки (оценки с таким свойством называются несмещёнными оценками); дисперсия этой оценки есть  $\text{D}(\overline{X}) = \text{E}(\overline{X} - \mu)^2 = \sigma^2/n$ . Опыт показывает, что практически очень часто случайные ошибки имеют распределения, близкие к нормальным (это объясняется [центральной предельной теоремой](#)). В этом случае распределение величины  $\overline{X}$  мало отличается от нормального распределения с математич. ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2/n$ . Если распределение величин  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  в точности нормально, то дисперсия всякой др. несмещённой оценки для  $\mu$ , напр. медианы, не меньше  $\text{D}(\overline{X})$ . Если же распределение величин  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  отлично от нормального, то последнее свойство может не иметь места.

Если дисперсия  $\sigma^2$  отд. измерений заранее неизвестна, то для её оценки пользуются величиной  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ ;  $s^2$  – несмещённая оценка для  $\sigma^2$ , т. к.  $\text{E} s^2 = \sigma^2$ .

Если случайные ошибки  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  имеют нормальное распределение, то отношение  $t = \frac{(\overline{X} - \mu) \sqrt{n}}{s}$  имеет [Стюдента распределение](#) с  $n-1$  степенью свободы. Этим можно воспользоваться для оценки погрешности приближённого равенства  $\mu \approx \overline{X}$  (см. [Наименьших квадратов метод](#)). Величина  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$  при тех же предположениях имеет [хи-квадрат распределение](#) с  $n-1$  степенью свободы. Это позволяет оценить погрешность приближённого равенства  $\sigma \approx s$ . Относительная погрешность  $|s - \sigma|/s$  не превосходит числа  $q$  с вероятностью  $\omega = F(z^2, n-1) - F(z_1, n-1)$ , где  $F(z, n-1)$  – функция распределения хи-квадрат,  $z_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{1+q}$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$ .

## Литература

Лит.: Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. 2-е изд. М., 1962; Бошвев Л. Н., Смирнов И. В. Таблицы математической статистики. М., 1983.