



ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ квадратной матрицы A порядка n , многочлен от элементов матрицы $A = \|a_{ij}\|$, каждый член которого является произведением n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, и снабжён определённым знаком, т. е. многочлен $\sum (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$. Здесь суммирование проводится по всем перестановкам i_1, i_2, \dots, i_n чисел $1, 2, \dots, n$, а τ — число инверсий в этой перестановке, т. е. число пар i_k, i_l , $1 \leq k < l \leq n$ таких, что $i_k > i_l$. Этот многочлен содержит $n!$ членов, из которых $n!/2$ берётся со знаком плюс и $n!/2$ — со знаком минус. Число n называется порядком определителя.

О. матрицы $A = \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ часто называют её **детерминантом** и обозначают $\det A$, $\det \|a_{ij}\|$ или, более подробно, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Для **О.** 2-го и 3-го порядков формула (*) принимает вид $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

О. обладают важными свойствами, которые, в частности, облегчают их вычисление. Простейшие из этих свойств следующие.

1) **О.** не изменится, если в нём строки и столбцы поменять местами (т. е. **О.** квадратной матрицы A равен **О.** транспонированной матрицы A^T):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) **О.** меняет знак, если поменять местами любые две строки или два столбца матрицы.

3) **О.** равен нулю, если элементы двух строк или двух столбцов соответственно пропорциональны.

4) Общий множитель всех элементов любой строки или столбца можно выносить за знак определителя.

5) Если каждый элемент к.-л. строки (столбца) есть сумма двух слагаемых, то **О.** равен сумме двух **О.**, причём в одном из них соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а в другом — из вторых слагаемых, остальные же строки (столбцы) — те же, что и в данной матрице.

6) **О.** не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы др. строки (столбца), умноженные на произвольный множитель.

7) О. треугольной матрицы равен произведению элементов её главной диагонали:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Если элементы a_{ij} матрицы A принадлежат некоторому полю, то $\det A$ есть элемент того же поля. О. можно рассматривать как функцию, определённую на множестве всех квадратных матриц порядка n над полем K со значениями в K . Оказывается, что существует лишь одна функция, обладающая свойствами 3), 4), 5), 7). Это может быть положено в основу аксиоматич. построения теории определителей.

Перечисленные свойства используются при вычислении О. матрицы над любым полем. Напр., сначала при помощи элементарных преобразований, т. е. с использованием свойств 2), 4), 6), матрица приводится к треугольному виду, а затем применяется свойство 7). Другой метод вычисления О. (при котором понижается порядок О.) основан на следующей формуле, дающей разложение О. по произвольной строке
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$
 где A_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, – алгебраич. дополнение элемента a_{ij} , т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, а M_{ij} – дополнительный минор к элементу a_{ij} , т. е. О. матрицы порядка $(n-1)$, полученной из матрицы A выбрасыванием i -й строки и j -го столбца. Аналогичная формула даёт разложение О. по произвольному столбцу. Разложение О. по строке может быть положено в основу индуктивного построения теории определителей.

Теория О. возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений и связанными с ней вопросами аналитич. геометрии. О. 2-го и 3-го порядков над полем действительных чисел допускают простое геометрич. истолкование: абсолютная величина $O. \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах (x_1, y_1) и (x_2, y_2) евклидовой плоскости, а абсолютная величина $O. \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ равна объёму параллелепипеда, построенного на векторах (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) 3-мерного евклидова пространства (системы координат предполагаются прямоугольными). Многие формулы аналитич. геометрии удобно записывать с помощью О.; напр., уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , может быть записано в виде
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В математич. анализе рассматриваются функциональные О., т. е. определители матриц, элементами которых являются функции, одним из таких О. является якобиан.

Термин «О.» в современном его значении ввёл О. Коши (1815), хотя ранее (1801) «детерминантом» К. Гаусс называл дискриминант квадратичной формы. Идея использования О. принадлежит Г. В. Лейбницу, который использовал О. (1693) при решении систем линейных уравнений. В 1750 метод О. был вновь разработан Г. Крамером. Франц. математик А. Вандермонд (1772) опубликовал первое обширное исследование, посвящённое О. Первые полные изложения теории О. даны в 1812 франц. математиком Ж. Бине и О. Коши. Обозначение – вертикальные линии – ввёл А. Кэли (1841).

Литература

Лит.: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 18-е изд. СПб., 2011.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/GeneralPunctuation.js