ОПЕРАЦИО́ННОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ

ОПЕРАЦИО́ННОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ, один из методов математич. анализа, позволяющий в ряде случаев с помощью простых правил решать сложные задачи. О. и. применяется в автоматике, механике, электротехнике. В основе О. и. лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) др. функциями (изображениями), получаемыми из первых по определённым правилам (обычно изображение – функция, получаемая из данной с помощью *Лапласа преобразования*). При такой замене оператор $p=\frac{d}{dt}$ интерпретируется как алгебраич. величина, вследствие чего интегрирование некоторых классов линейных дифференциальных уравнений и решение ряда др. задач математич. анализа сводится к решению более простых алгебраич. задач. Так, решение линейного дифференциального уравнения сводится к более простой задаче решения алгебраич. уравнения: из алгебраич. уравнения находят изображение решения данного дифференциального уравнения, после чего по изображению восстанавливают само решение. Операции нахождения изображения по оригиналу (и наоборот) облегчаются наличием обширных таблиц «оригинал – изображение».

Для развития О. и. большое значение имели работы О. *Хевисайда*. Он предложил (1892) формальные правила обращения с оператором $p=\frac{d}{dt}$ и некоторыми функциями от этого оператора. Пользуясь О. и., Хевисайд решил ряд важных задач электродинамики, однако О. и. в его работах не получило математич. обоснования, многие его результаты оставались недоказанными.

Строгое обоснование О. и. было дано с помощью интегрального преобразования Лапласа. Если при этом преобразовании функция $f(t)$, $0 \leq t < \infty$, переходит в функцию $F(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, то производная $f'(t)$ переходит в функцию $zF(z)-f(0)$, а интеграл $\int_0^t f(u)du$ переходит в функцию $\frac{F(z)}{z}$, т. е. оператор дифференцирования p переходит в оператор умножения на переменную z, а интегрирование сводится к делению на z. В следующей краткой таблице даны ещё несколько соответствий.

Оригинал	Изображение
1	$1/z$
t^n	$n!/z^{n+1}(n > 0 - \text{целое})$
$e^{\lambda t}$	$1/(z- \lambda)$
$\cos \omega t$	$z/(z^2 + \omega^2)$
$\sin \omega t$	$\omega /(z^2 + \omega^2)$.

Пример. Найти с помощью О. и. решение $y=f(t)$ линейного дифференциального уравнения $y''-y'-6y=2e^{4t}$при начальных условиях $y_0=f(0)=0 \ \text{и} \ y'_0=f'(0)=0$Переходя от искомой функции $f(t)$ и данной функции $2e^{4t}$ к их изображениям $F(z)$ и $2/(z-4)$ (последняя берётся из табл.) и применяя формулу для изображения производной, получают алгебраич. уравнение $z^2F(z)-zF(z)-6F(z)=\frac{2}{z-4}$ или F(z)=\frac{2}{(z+2)(z-3)(z-

4)}$=\frac{1}{15}\frac{1}{z+2}-\frac{2}{5}\frac{1}{z-3}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-4}$. Отсюда (опять по табл.) $y=f(t)=\frac{1}{15}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{3t}+\frac{1}{3}e^{4t}$.

Имеются разл. обобщения О. и. Существует многомерное О. и., основанное на теории кратных интегралов. Созданы О. и. для дифференциальных операторов, отличных от оператора $p=\frac{d}{dt}$, напр. для оператора $B=\frac{d}{dt}t\frac{d}{dt}$.

Литература

Лит.: Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., 1965; они же. Интегральные преобразования и операционное исчисление. 2-е изд. М., 1974.