



# ОПЕРА́ТОР

ОПЕРА́ТОР, математическое понятие, в самом общем смысле означающее соответствие между элементами двух множеств

$X$  и

$Y$ , относящее каждому элементу

$x$  из

$X$  некоторый элемент

$y$  из

$Y$ . Эквивалентный смысл имеют термины операция, [отображение](#), [преобразование](#), [функция](#). Элемент  $y$  называется образом

$x$ ,

$x$  — прообразом

$y$ . Термин  $O$ . часто употребляется в функциональном анализе и линейной алгебре, в особенности для отображений векторных пространств.  $O$ .

$A$  из множества

$X$  в множество

$Y$  может быть определён не всюду, тогда говорят о его области определения

$D_A = D(A) \subset X$ . Для

$x \in D_A$  результат применения  $O$ .

$A$  к

$x$  обозначают

$A(x)$  или

$Ax$ .

Если

$X$  и

$Y$  — [векторные пространства](#) над одним и тем же полем

$K$ , то в множестве всех  $O$ . из

$X$  в

$Y$  можно выделить класс линейных  $O$ ., т. е. таких операторов

$A$ , для которых для всех

$x$ ,

$y \in X$

$$A(x + y) = A(x) + A(y), A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

для всех

$\lambda \in K$ ; остальные  $O$ . из

$X$  в

$Y$  называются нелинейными. Если

$X$  и

$Y$  – топологические пространства, то в множестве  $O$ . из

$X$  в

$Y$  выделяется класс непрерывных  $O$ ., т. е. таких операторов

$A$ , для которых для любой точки

$x \in X$  и для всякой окрестности

$V = V(A(x))$  её образа

$A(x)$  существует такая окрестность

$U = U(x)$  точки

$x$ , что

$A(U) \subset V$ ; здесь

$A(U)$  означает множество образов всех точек из

$U$ . Существуют и другие классы  $O$ . Изучение линейных  $O$ . в топологич. векторных пространствах составляет важный раздел функционального анализа.

Примеры.

1)  $O$ . дифференцирования

$$D[f(t)] = f'(t)$$

сопоставляет каждой дифференцируемой функции

$f(t)$  её производную

$f'(t)$ . Вообще левую часть линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = \phi(t)$$

можно рассматривать как результат применения некоторого  $O$ ., ставящего в соответствие функции

$x(t)$  функцию

$\phi(t)$ . Такой  $O$ . называется линейным дифференциальным оператором; примерами линейных дифференциальных

$O$ . являются Гамильтона оператор и Лапласа оператор.

2)  $O$ . определённого интегрирования

$$\int_a^b f(t) dt = I,$$

где

$a$  и

$b$ ,

$a < b$ , – действительные числа, сопоставляет каждой интегрируемой функции

$f(t)$  число

I.

3) Сопоставив каждой функции

$f(t)$  её произведение

$\phi(t)f(t)$  на фиксированную функцию

$\phi(t)$ , получают О. умножения на функцию

$\phi(t)$ .

4) Пусть

$K(s, t)$  – непрерывная функция двух переменных, заданная в квадрате

$a \leq s \leq b$ ,

$a \leq t \leq b$ . Формула

$$\int_a^b K(s, t)g(t)dt = f(s),$$

сопоставляющая непрерывной функции

$g(t)$  непрерывную функцию

$f(s)$ , определяет линейный интегральный О. В то же время формула

$$\int_a^b F(s, g(t))dt = h(s),$$

где

$F$  – некоторая ограниченная непрерывная функция, определяет, вообще говоря, нелинейный интегральный оператор.

## Литература

Лит.: Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М., 2012.

Processing math: 100%