



ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА

ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА, формула преобразования интеграла, взятого по объёму Ω , ограниченному поверхностью Σ , в интеграл, взятый по этой поверхности:
$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Sigma} X dy dz + Y dx dz + Z dx dy;$$
 здесь X, Y, Z — функции точки (x, y, z) , принадлежащей 3-мерной области Ω . О. ф. получена М. В. [Остроградским](#) (1828, опубл. в 1831). В векторной форме О. ф. имеет вид
$$\iiint_{\Omega} \text{div} \mathbf{p} \, dv = \iint_{\Sigma} (\mathbf{p}, \mathbf{n}) d\sigma,$$
 где \mathbf{p} — вектор поля, заданного в области Ω , dv — элемент объёма, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ , $d\sigma$ — элемент этой поверхности. В гидродинамич. истолковании О. ф. устанавливает равносильность двух способов учёта количества жидкости, которое вытекает из оболочки Σ в единицу времени: исходя из интенсивности точечных источников, заполняющих область Ω (левая часть равенства); исходя из скоростей частиц жидкости в момент их прохождения через оболочку Σ (правая часть равенства). Самим Остроградским формула была обобщена (1834, опубл. в 1838) для интеграла по n -мерной области. Если $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ есть уравнение (гипер-)поверхности Σ , ограничивающей область Ω , то
$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Sigma} \frac{X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2}} ds,$$
 где в правой части интеграл взят по поверхности Σ с элементом площади ds .

Processing math: 0%