ОСО́БАЯ ТО́ЧКА

Авторы: Е. Д. Соломенцев

ОСО́БАЯ ТО́ЧКА аналитической функции, препятствие для аналитического продолжения элемента аналитической функции вдоль некоторого пути. Каждая *аналитическая функция* $f(z)$ комплексного переменного z может быть задана своим регулярным элементом, т. е. степенным рядом $f(z)=\sum^\infty_{n=0}a_n(z-z_0)^n$, представляющим эту функцию в своём круге сходимости $|z-z_0| \lt R$. Если аналитич. продолжение этого элемента возможно по всем путям во все точки z комплексной плоскости, включая и бесконечно удалённую точку $z=\infty$, то функция $f(z)$ необходимо является постоянной. Для нетривиальных аналитич. функций характерно наличие препятствий для аналитич. продолжения по некоторым путям, т. е. О. т. При этом может случиться, что в одну и ту же точку z_0 комплексной плоскости продолжение по некоторым путям возможно, а по другим невозможно; в этом случае говорят, что над z_0 расположены как правильная точка, так и особая точка.

Для однозначных элементарных функций характерно наличие изолированных О. т., т. е. таких, для которых существует окрестность, свободная от других О. т. При этом если z_0 – изолированная О. т. и $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$, то z_0 называется полюсом функции $f(z)$. Если же не существует конечного или бесконечного предела $\lim_{z\to z_0}f(z)$, то z_0 называется существенно особой точкой. В случае конечного предела $\lim_{z \to z_0}f(z)=A$ аналитич. продолжение в точку z_0 возможно и следует положить $f(z_0)=A$; в этом случае z_0 иногда называют устранимой особой точкой.

Лорана ряд функции $f(z)$ в окрестности изолированной О. т. z_0 $f(z)=\sum^\infty_{n=0}a_n(z-z_0)^n+\sum^\infty_{n=1}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ либо содержит лишь конечное число отрицательных степеней разности $z-z_0$, если z_0 – полюс (наивысшая степень $\frac{1}{z-z_0}$, встречающаяся в ряде Лорана, называется порядком полюса), либо содержит сколь угодно высокие степени $\frac{1}{z-z_0}$, если z_0 – существенно особая точ-ка. Напр., для функции $1/z^3$ точка $z=0$ является полюсом порядка 3, а для функции $\sin \frac{1}{z}=\sum^\infty_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}$ $z_0=0$ – существенно особая точка.

У многозначных аналитич. функций, помимо уже описанных О. т. однозначного характера для однозначных элементов этих функций, могут встретиться изолированные О. т. многозначного характера или точки ветвления. Точки ветвления z_0 характерны тем, что аналитич. продолжение функции $f(z)$ по достаточно малым окружностям $|z-z_0|=r$ с центром в z_0 приводит к новым значениям $f(z)$, отличным от исходного. Напр., точка $z_0=0$ является точкой ветвления для функций $\sqrt{z}$ и $\text{Ln}\ z$; при однократном обходе вокруг неё функция $\sqrt{z}$ меняет знак, а к значению $\text{Ln}\ z$ прибавляется или вычитается 2π (в зависимости от направления обхода). Если после некоторого миним. числа $m \gt 1$ обходов точки ветвления z_0 в одном и том же направлении приходят к исходному элементу, то z_0 называется точкой ветвления конечного порядка $m-1$ ($z_0=0$ есть точка ветвления порядка 1 для $\sqrt{z}$). Если ни при каком числе последовательных обходов нельзя возвратиться к исходному элементу, то z_0 называется логарифмич. точкой ветвления или точкой ветвления бесконечного порядка (точка $z_0=0$ для функции $\text{Ln}\ z$).

Если функция $f(z)$ представлена степенным рядом, то на границе круга сходимости этого ряда находится по крайней мере одна О. т. функции $f(z)$. Может оказаться, что все граничные точки области существования однозначной аналитич. функции являются для неё О. т. Так, напр., все точки единичной окружности $|z|=1$ являются особыми для функции $f(z)=z+z^2+z^4+\ldots=\sum^\infty_{n=0}z^{2^n}$, а сама окружность $|z|=1$ есть естественная граница этой функции.

Для (однозначных) аналитич. функций $f(z_1,\ldots,z_n)$ многих комплексных переменных характерно прежде всего то, что у них не могут существовать изолированные О. т. При $n \gt 1$ О. т. образуют некоторые непрерывные области.

Processing math: 0%