



ЛИ ГРУПП ТЕОРИЯ

ЛИ ГРУПП ТЕОРИЯ, раздел алгебры, изучающий группы Ли. Группой Ли называется группа, являющаяся одновременно гладким (аналитическим) вещественным или комплексным многообразием, алгебраич. операции в которой выражаются в локальных координатах гладкими (аналитическими) функциями. Обычно термин «группа Ли» относят к вещественному случаю, а в комплексном случае говорят о комплексной группе Ли. Названы по имени С. [Ли](#), который в своих работах 1876–93 заложил основы теории таких групп.

В работах Ли рассматривались группы локальных аналитич. преобразований вещественного евклидова пространства R^n (а также комплексного пространства C^n), зависящих от конечного числа параметров a_1, \dots, a_r , $\widetilde{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)$, $i=1, \dots, n$.

Здесь f_1, \dots, f_n – аналитич. функции, и предполагается, что параметры a_1, \dots, a_r , соответствующие произведению двух преобразований, являются аналитич. функциями от параметров сомножителей. Чтобы подчеркнуть контраст с конечными группами подстановок, такие группы преобразований стали называть конечными непрерывными группами. При этом рассматривались и группы преобразований, зависящие от бесконечного числа параметров (в совр. терминологии – бесконечномерные группы Ли). Термин «непрерывные группы» сохранялся за группами Ли до 1930-х гг., хотя термин «группы Ли» начал употребляться намного раньше. Д. [Гильберт](#) в докладе на 2-м Междунар. математич. конгрессе (Париж, 1900) поставил вопрос о том, будет ли любая локально евклидова топологич. группа группой Ли (5-я проблема Гильберта). Для групп преобразований это означает, что в определении групп Ли можно считать функции f_i непрерывными, и непрерывной заменой координат превратить их в гладкие (или аналитические). Эта проблема была положительно решена амер. учёными А. Глисоном, Д. Монтгомери и Л. Циппином (1955) после того, как ряд глубоких частных результатов был получен Дж. фон [Нейманом](#), Л. С. [Понтрягиным](#) и др.

Примерами групп Ли являются разл. [преобразований группы](#), используемые в геометрии, среди которых следующие:

- 1) n -мерное [векторное пространство](#) с операцией сложения векторов;
- 2) окружность, рассматриваемая как группа поворотов плоскости на к.-л. угол с операцией сложения углов;
- 3) группа матриц (или линейных преобразований векторного пространства) с операцией умножения матриц.

В отличие от первых двух, последний пример даёт некоммутативную группу Ли.

Ли г. т. возникла в связи с изучением дифференциальных уравнений. С каждым дифференциальным уравнением связана группа Ли преобразований, оставляющих его неизменным. Напр., однородные дифференциальные уравнения $\{y\}' = f(y/x)$ не изменяются при преобразованиях плоскости вида $\widetilde{y} = cy$, $\widetilde{x} = cx$. С. Ли нашёл алгебраич. условие на группу Ли уравнения, достаточное для того, чтобы оно разрешалось (интегрировалось) в квадратурах (отсюда возникло понятие разрешимой группы Ли). Ли исходил при этом из

аналогичных понятий и результатов [Галуа теории](#).

Ф. [Клейном](#) была предложена общая точка зрения (Эрлангенская программа), согласно которой геометрия есть наука, изучающая те свойства фигур, которые не меняются при заданной группе непрерывных преобразований. С этим связана важная роль Ли г. т. в геометрии. Осн. примеры групп Ли являются группами преобразований разл. геометрич. структур, напр. группы преобразований, сохраняющих квадратичную форму (ортогональные преобразования), группы проективных, т. е. дробно-линейных, преобразований, группы движений римановых [многообразий](#) или группы их изометрий, группы всех автоморфизмов компактного комплексного многообразия (комплексная группа Ли) и др.

С. Ли разработал метод изучения непрерывных групп преобразований, основанный на сопоставлении каждой такой группе некоторого набора аналитич. векторных полей (см. [Векторное исчисление](#)), которые он называл инфинитезимальными преобразованиями, а именно – полей $\delta_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} x_j$ ($x_1, \dots, x_n; 0, \dots, 0$) $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, r$

Они определены в окрестности точки pt пространства параметров pt^r , которая соответствует тождественному преобразованию. Оказывается, что коммутаторы $[\delta_i, \delta_j]$, $i, j=1, \dots, r$, выражаются через $\delta_1, \dots, \delta_r$ в виде линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, т. е. линейная оболочка L полей $\delta_1, \dots, \delta_r$ является конечномерным векторным пространством с дополнит. операцией коммутирования (см. [Ли алгебра теория](#)). Алгебра L , названная С. Ли инфинитезимальной группой, в дальнейшем стала называться алгеброй Ли или касательной алгеброй данной группы Ли. Как было установлено С. Ли, алгебра L полностью определяет группу локальных преобразований f_1, \dots, f_n .

В совр. терминологии алгебра Ли $L(G)$ данной группы Ли G представляет собой касательное пространство (на котором определена структура алгебры Ли) к группе в единичном элементе e . Она имеет ту же размерность, что и исходная группа Ли. Умножение (коммутирование) $[u, v]$ касательных векторов u и v определяется как касательный вектор $[u, v]$ при $t=0$ к кривой $q(t) = \alpha(\sqrt{t})\beta(\sqrt{t})\alpha(\sqrt{t})^{-1}\beta(\sqrt{t})^{-1}$, где α, β – такие гладкие кривые на G , что $\alpha(0) = \beta(0) = e$, и их касательные векторы при $t=0$ суть векторы u и v соответственно. Напр., группе $G = GL_n(\mathbb{R})$ всех невырожденных вещественных матриц порядка n отвечает алгебра Ли $L(G) = gl_n(\mathbb{R})$ всех матриц порядка n с операцией $\left[X, Y \right] = XY - YX$; группе $O(\mathbb{R}^3)$ всех вращений евклидова пространства \mathbb{R}^3 отвечает алгебра Ли $L(O(\mathbb{R}^3)) = \mathfrak{so}(3)$, которая определяется в пространстве \mathbb{R}^3 векторным умножением. В Ли г. т. группы Ли рассматриваются с точностью до аналитич. изоморфизма, т. е. взаимно однозначного аналитич. (в обе стороны) отображения одной группы в другую, сохраняющего умножение и единичный элемент. Две односвязные группы Ли аналитически изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли. Для всякой конечномерной алгебры Ли L (над полем \mathbb{R} или \mathbb{C}) существует группа Ли (соответственно, вещественная или комплексная), имеющая L в качестве касательной алгебры.

Инфинитезимальный метод, разработанный С. Ли, позволил в дальнейшем получить глубокие результаты о строении и классификации связных групп Ли. По аналогии с теорией обычных групп определяются разрешимые группы Ли. Группа Ли является разрешимой, если её алгебра Ли разрешима. Каждая связная группа Ли G содержит наибольшую связную разрешимую подгруппу Ли $\text{rad} G$. Группа G называется полупростой, если $\text{rad} G = \{e\}$. Также можно ввести понятия полупростых и простых групп Ли (эти свойства для

группы Ли G равносильны, соответственно, полупростоте и простоте её алгебры Ли $L(G)$). Каждая односвязная полупростая группа Ли разлагается в прямое произведение простых подгрупп Ли. На этом пути получена полная классификация связных полупростых групп Ли. В каждой размерности их имеется, с точностью до изоморфизма, лишь конечное число. Эти и др. результаты совр. Ли г. т. были получены после работ С. Ли, в осн. в 20 в. Они связаны с именами нем. математика В. Киллинга, Э. [Кармана](#), Г. [Вейля](#) и франц. математика К. Шевалье.

Зародившаяся на стыке алгебры, геометрии и анализа, Ли г. т. сохраняет плодотворные связи с этими дисциплинами. С алгеброй она связана через теорию алгебр Ли и теорию алгебраич. групп. Связь групп Ли с дифференциальными уравнениями, явившаяся для С. Ли одним из стимулов для изучения непрерывных групп, позволяет во многих случаях описывать семейство всех решений системы дифференциальных уравнений и строить некоторые конкретные решения. Существуют связи между Ли г. т. и теорией оптимального управления. Важные приложения в математике и физике имеет теория линейных представлений групп Ли (см.

[Представлений групп теория](#)). Симметрии относительно разл. классов групп Ли играют фундам. роль в совр. теориях элементарных частиц, начиная с теории унитарной симметрии, классифицирующей элементарные частицы с точки зрения линейных представлений спец. унитарных групп SU_2 и SU_3 и приведшей к концепции [кварков](#), и кончая совр. калибровочными теориями, объединившими осн. виды взаимодействий в единое целое.

Литература

Лит.: Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М., 1969; Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М., 1970; Бурбаки Н. Элементы математики. Группы и алгебры Ли. М., 1972–1986. [Т. 1–4]; Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978; Постников М. М. Группы и алгебры Ли. М., 1982; Группы Ли и алгебры Ли. М., 1988–1990. [Т. 1–3]; Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. 2-е изд. М., 1995; Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. 5-е изд. М., 2004.

Processing math: 0%