



ЛИ АЛГЕБР ТЕОРИЯ

ЛИ АЛГЕБР ТЕОРИЯ, раздел алгебры, изучающий алгебры Ли. Алгеброй Ли называется алгебра (см. [Кольцо](#) [теория](#)) над некоторым [полем](#) K с умножением (для элементов a и b алгебры Ли их произведение обычно обозначается $[a, b]$), обладающим следующими свойствами: для любых элементов x, y, z

$$[x, x] = 0;$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

(тождество Якоби).

Первое из этих свойств влечёт равенство $[x, y] = -[y, x]$ (антикоммутативность). Алгебра Ли называется коммутативной (или абелевой), если в ней выполняется равенство $[x, y] = 0$ для всех элементов x и y . Алгебры Ли, как правило, неассоциативны.

Примеры и конструкции алгебр Ли.

1) Любая ассоциативная алгебра A (с умножением, обозначаемым обычным образом) превращается в алгебру Ли A_L , если ввести в ней новое умножение $[x, y] = xy - yx$ (коммутирование). Т. о. строится алгебра Ли $gl_n(K)$ всех матриц порядка n над K , умножение в которой есть коммутирование матриц, или алгебра $gl(V)$ линейных преобразований [векторного пространства](#) V .

2) Алгебры Ли аналитических (соответственно, гладких) векторных полей (см. [Векторное исчисление](#)) на любом аналитическом (соответственно, гладком) многообразии.

3) С каждой группой Ли G связывается алгебра Ли $L(G)$ той же размерности (см. [Ли групп теория](#)).

Не всякая алгебра Ли получается из некоторой ассоциативной алгебры с помощью конструкции из примера

1), однако любую алгебру Ли L над полем K можно вложить как подалгебру в алгебру Ли такого типа. Более того, существует такая ассоциативная алгебра $U(L)$ и такое вложение $i: L \rightarrow U(L)_L$, что любой гомоморфизм $f: L \rightarrow A_L$, где A — ассоциативная алгебра, представим в виде суперпозиции $f = \varphi \circ i$, где $\varphi: U(L) \rightarrow A$ — однозначно определённый гомоморфизм алгебр. Алгебра $U(L)$ (вместе с вложением i) определена для L однозначно и называется универсальной обёртывающей алгеброй алгебры Ли L . Если в L выбрать базис e_1, e_2, \dots , то одночлены где $k_1 \leq \dots \leq k_n$, — целые неотрицательные числа, составляют базис в $U(L)$. В случае, когда L есть n -мерная коммутативная алгебра Ли, $U(L)$ — алгебра многочленов от e_1, \dots, e_n .

Линейным представлением алгебры Ли L над полем K в векторном пространстве V над K называется гомоморфизм $L \rightarrow gl(V)$ в алгебру Ли $gl(V)$. Любое аналитич. линейное представление группы Ли определяет линейное представление соответствующей алгебры Ли (в том же векторном пространстве). Любое линейное представление алгебры Ли L однозначно продолжается до линейного представления ассоциативной алгебры $U(L)$, что сводит теорию представлений алгебр Ли к теории [модулей](#) над некоторым классом ассоциативных алгебр. Универсальная обёртывающая алгебра играет здесь роль, аналогичную роли групповой алгебры в

представлений групп теории. Важным результатом является следующая теорема: любая конечномерная алгебра Ли над произвольным полем K допускает точное линейное представление в конечномерном векторном пространстве над K , т. е. может быть вложена в алгебру $gl(V)$.

Коммутантом алгебры Ли L называется линейная оболочка $[L, L]$ её элементов вида $[x, y]$, где $x, y \in L$; коммутант является идеалом в L . Полагая по индукции $D^p L = [D^{p-1} L, D^{p-1} L]$, $p = 1, 2, \dots, D^0 L = L$, получают убывающую цепочку идеалов $L = D^0 L \supset D^1 L \supset D^2 L \supset \dots$. Если $D^p L = 0$ для некоторого p , то алгебра Ли L называется разрешимой. Алгебра Ли L называется полупростой, если L не содержит ненулевых разрешимых идеалов, и простой, если L не содержит ненулевых идеалов, отличных от L . В любой конечномерной алгебре Ли L существует наибольший разрешимый идеал $\text{rad } L$ – радикал алгебры Ли L , причём факторалгебра $L/\text{rad } L$ полупроста. Наиболее изучено строение конечномерных полупростых алгебр Ли над полем K характеристики 0. Такие алгебры разлагаются в прямую сумму простых алгебр Ли. Над полем \mathbb{C} комплексных чисел (а также над любым алгебраически замкнутым полем характеристики 0) известны все конечномерные алгебры Ли. Это прежде всего следующие алгебры Ли:

$$A_n = sl_{n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in gl_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \text{tr} X = 0\}, n \geq 1,$$

$$B_n = so_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in gl_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^T = -X\}, n \geq 2,$$

$$C_n = sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in gl_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^T B + BX = 0\}, n \geq 3,$$

$$D_n = so_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in gl_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^T = -X\}, n \geq 4,$$

где $\text{tr}(X)$ – след матрицы X , верхний индекс T означает транспонирование матрицы, $B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Кроме них, имеется единственная коммутативная простая алгебра размерности 1 и ещё пять т. н. особых простых алгебр Ли E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 , имеющих размерности соответственно 78, 133, 248, 52, 14. Известна также классификация конечномерных простых алгебр Ли над полем вещественных чисел \mathbb{R} .

Классич. Ли а. т., осн. результаты которой принадлежат Э. Картану, является вполне законченной. Совр. Ли а. т. имеет дело с такими алгебрами Ли, как алгебры Ли над полем простой характеристики, бесконечномерные алгебры Ли и некоторые обобщения алгебр Ли (такие, как супералгебры Ли). Эти классы алгебр исследованы менее полно. Все они имеют многочисл. применения как в математике, так и в механике, физике и др. науках.

Ли а. т. появилась в кон. 19 в. в связи с развитием теории групп Ли. Термин ввёл Г. Вейль (1934).

Литература

Лит.: Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., 1964; Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. М., 1981; Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М., 1993.