



КОМБИНАТО́РНАЯ ТЕО́РИЯ ГРУПП

Авторы: И. Г. Лисёнок

КОМБИНАТО́РНАЯ ТЕО́РИЯ ГРУПП, раздел *групп теории*, в котором характерной чертой исследований является использование комбинаторных методов, в отличие от алгебраических, геометрических и пр. Осн. объекты К. т. г. – группы, заданные с помощью порождающих и определяющих соотношений. Всякая группа есть множество с заданными на нём двумя операциями – произведением и взятием обратного элемента. Если подмножество X элементов группы G таково, что любой её элемент получается из элементов подмножества X конечным числом применений этих двух операций, то X называется множеством порождающих для группы G . Выбор некоторого фиксированного множества порождающих для группы G позволяет представить любой элемент группы G конечной записью (т. н. групповым словом), в которой участвуют лишь порождающие элементы группы. Напр., слово $ab^{-1}c$ обозначает элемент, полученный произведением трёх порождающих, b^{-1} и c , где b^{-1} – элемент, обратный b . Любая абстрактная группа G может быть задана конечным или бесконечным множеством порождающих и конечным или бесконечным множеством определяющих соотношений вида $R=1$, где R – групповое слово в алфавите порождающих. Для множества порождающих a_1, a_2, \dots, a_n и множества определяющих соотношений $R_1=1, R_2=1, \dots, R_m=1$ задаваемая ими группа G определяется следующим образом. Рассматривается множество групповых слов в алфавите a_1, a_2, \dots, a_n и определяются два вида операций на словах из этого множества: 1) вставка или вычёркивание двухбуквенных подслов вида $a_i a_i^{-1}$ или $a_i^{-1} a_i$, $i=1, 2, \dots, n$, 2) вставка или вычёркивание левых частей R_j , $j=1, 2, \dots, m$, определяющих соотношений. Два слова, которые могут быть получены друг из друга с помощью конечного числа операций 1) и 2), считаются эквивалентными. Это отношение эквивалентности разбивает множество всех групповых слов в алфавите a_1, a_2, \dots, a_n на классы эквивалентности, которые и рассматриваются в качестве элементов группы G . Произведением двух классов эквивалентности, содержащих слова x и y , по определению считается класс, содержащий слово xy . Роль единичного элемента играет класс, содержащий пустое слово, а операция взятия обратного элемента определяется следующим образом. Для данного группового слова x определяется формальное обратное слово x^{-1} , которое получается чтением слова x в обратном порядке и заменой каждой буквы a_i на a_i^{-1} и, наоборот, a_i^{-1} на a_i . Классы эквивалентности, содержащие слова x и x^{-1} , являются взаимно обратными элементами группы G . Простейшими примерами групп, заданных с помощью порождающих и определяющих соотношений, являются свободные группы – группы, для которых множество определяющих соотношений пусто.

Особую роль в К. т. г. играют группы, для которых могут быть выбраны конечные множества порождающих и определяющих соотношений, такие группы называются конечно определёнными группами. Любая конечная группа конечно определена, однако класс конечно определённых групп содержит и широкий подкласс бесконечных групп. То обстоятельство, что бесконечная группа может быть задана с помощью порождающих и определяющих соотношений записью конечной длины, и послужило активному развитию К. т. г. При исследовании групп, заданных таким способом, осн. инструментом являются разл. комбинаторные методы, т. к. в этом случае имеют дело со словами и отношениями на множестве слов.

Развитие К. т. г. началось с работы нем. математика В. фон Дика (1882), в которой было сформулировано само понятие группы, заданной порождающими и определяющими соотношениями. В работе нем. математика М. Дэна (1911) были выделены три проблемы, связанные с этим понятием. 1. Проблема распознавания равенства: по любым двум групповым словам, представляющим элементы данной группы, определить, равны эти элементы или нет. 2. Проблема распознавания сопряжённости: по любым двум групповым словам, представляющим элементы группы, определить, сопряжены они или нет, при этом два элемента g и h группы называются сопряжёнными, если выполнено равенство $g = x^{-1}hx$ при некотором x . 3. Проблема распознавания изоморфизма: по любым двум конечным заданиям групп с помощью порождающих и определяющих соотношений определить, изоморфны данные группы или нет. Эти проблемы являются примерами [алгоритмических проблем](#), в которых ставится вопрос о существовании алгоритма, определяющего по данному объекту из некоторого бесконечного множества обладает этот объект данным свойством или нет. Фундаментальный результат П. С. [Новикова](#) (1955) и У. Буна (1959) утверждает, что в общем случае проблема распознавания равенства и, как следствие, проблема распознавания сопряжённости неразрешимы, т. е. для них такого алгоритма не существует. Согласно теореме С. И. [Адяна](#) (1955) и амер. математика М. Рабина (1958), почти все естественные свойства групп, заданных порождающими и определяющими соотношениями, алгоритмически нераспознаваемы; в частности, проблема распознавания изоморфизма также неразрешима. Утверждения об алгоритмической неразрешимости свойств элементов групп и свойств самих групп – важнейшие результаты К. т. г., оказавшие влияние на теорию групп и др. области математики.

Одним из классических направлений исследований в рамках К. т. г. является нахождение классов групп, для которых те или иные алгоритмические проблемы разрешимы. Другое направление, в которых также были получены значительные результаты, – изучение различных известных «классических» групп, изучение т. н. свободных конструкций, построение примеров групп с необычными свойствами.

Литература

Лит.: Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М., 1974; Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М., 1977; Коксетер Г., Мозер У. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М., 1980; Чандлер Б., Магнус В. Развитие комбинаторной теории групп. М., 1985.

Processing math: 0%