



ВЫ́ЧЕТ

Авторы: А. А. Карацуба, П. В. Парамонов

ВЫ́ЧЕТ, 1) в теории чисел. V . по модулю m (m – натуральное число) – любое число из множества всех целых чисел, дающих одинаковые остатки при делении на m . Все целые числа, по отношению к заданному натуральному числу m , распадаются на m разл. классов: к одному классу относят те числа, которые при делении на m дают один и тот же остаток. Напр., числа $\dots, -9, -2, 5, 12, 19, \dots$ при делении на 7 дают остаток 5, т. е. образуют один класс V . по модулю 7, любое число из этого класса является V . по модулю 7. Т. о., наименьший неотрицательный V . из заданного класса равен остатку от деления любого числа из этого класса на m . Если взять из каждого класса по одному V ., то получится совокупность чисел, которая называется полной системой вычетов по модулю m . Напр., если $m = 10$, то каждая из совокупностей $(0, 1, \dots, 9)$, $(-5, -4, \dots, 3, 4)$, $(-4, -3, \dots, 4, 5)$ образует полную систему V . по модулю 10. Все числа полной системы V ., взаимно простые с модулем m , образуют совокупность, которая называется приведённой системой вычетов по модулю m . Напр., приведённой системой V . по модулю 10 является каждая из совокупностей $(1, 3, 7, 9)$, $(-3, -1, 1, 3)$.

Если a и b принадлежат одному классу V . по модулю m , то говорят, что a сравнимо с b по модулю m и пишут $a \equiv b \pmod{m}$. Это соотношение называется *сравнением*. Сравнения по модулю m обладают многими свойствами равенств: их можно почленно складывать, вычитать, перемножать; они обладают также свойствами, которых нет у равенств. Число a , взаимно простое с m , называется V . степени n , где n – натуральное число, $n \geq 2$, если найдётся такое b , что $a \equiv b^n \pmod{m}$ (степенной V .); в противном случае a называется невычетом степени n по модулю m . Вычеты (невычеты) степени $n = 2$ называются квадратичными, степени $n = 3$ – кубическими, степени $n = 4$ – биквадратичными. Напр., если $m = 7$, то числа 1, 2, 4 – квадратичные V ., а числа 3, 5, 6 – квадратичные невычеты по модулю 7, числа 1, 6 – кубические V ., а числа 2, 3, 4, 5 – кубические невычеты по модулю 7.

2) V . в теории функций комплексного переменного. V . голоморфной функции f в изолированной особой точке z_0 , $z_0 \neq \infty$, называется коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении функции f в ряд по целым степеням $z - z_0$ (см. *Лорана ряд*) в окрестности точки z_0 . Обычно V . функции f в точке z_0 обозначается $\operatorname{res}_{z_0} f$. Если γ – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_0 такая, что в ограниченном ею круге функция f не имеет особых точек, отличных от z_0 , причём γ ориентирована против часовой стрелки, то $\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$.

Пусть D – область комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной так, что при движении по Γ область D остаётся слева. Если z_1, \dots, z_n – все особые точки функции f в области D , причём f голоморфна в D и в некоторой окрестности Γ , то $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z_1} f + \dots + \operatorname{res}_{z_n} f)$.

Поскольку V . находятся сравнительно просто, эта теорема является эффективным средством для вычисления интегралов.

Литература

Лит.: Виноградов И. М. Основы теории чисел. 11-е изд. СПб., 2006.

Лит.: Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 14-е изд. М., 1999.

Loading [MathJax]/extensions/TeX/mathchoice.js