

ГРА́ФОВ ТЕО́РИЯ

Авторы: В. Е. Тараканов

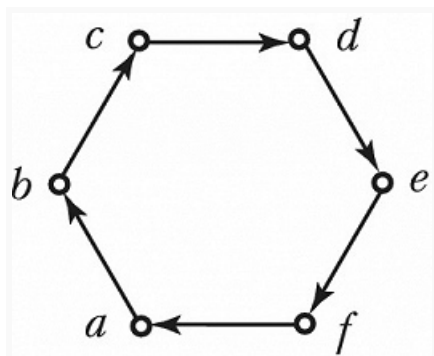


Рис. 2.

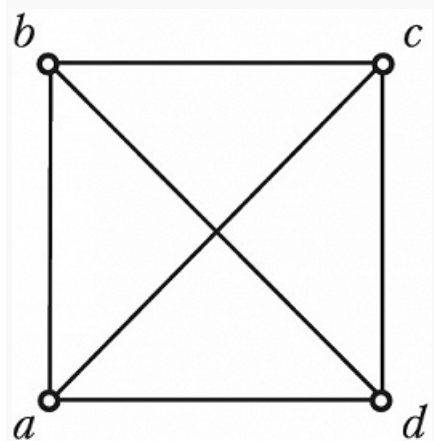


Рис. 1.

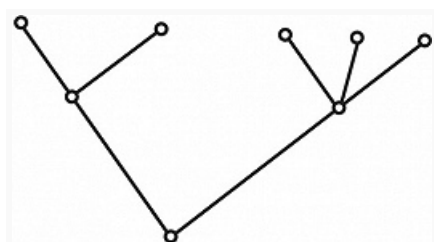


Рис. 3.

ГРА́ФОВ ТЕО́РИЯ, раздел дискретной математики, в котором изучаются свойства графов и их обобщений. Графом называется пара (V, E) , где V – множество точек, называемых вершинами, и E – множество пар вершин, причём если порядок, в котором перечислены вершины в паре, не важен, то эта пара вершин графа называется ребром, а если важен – дугой. Граф, содержащий только рёбра, называется неориентированным графом, или просто графом, а граф, содержащий только дуги, – ориентированным графом. На рис. 1 – неориентированный граф с вершинами a, b, c, d и рёбрами (a, b) , (b, c) , (c, d) , (a, d) , (a, c) , (b, d) , на рис. 2 – ориентированный граф с вершинами a, b, c, d, e, f и дугами (a, b) , (b, c) , (c, d) , (d, e) , (e, f) , (f, a) .

Исторический очерк

Первые задачи Г. т. были связаны с решением математич. задач развлекательного характера и головоломок (см. [Комбинаторные задачи классические](#)). Одним из первых результатов Г. т. был критерий существования обхода всех рёбер графа без повторений, полученный Л. [Эйлером](#) (1736) при решении задачи о Кёнигсбергских мостах (см. [Гамильтонов цикл](#)). С сер. 19 в. появляются относящиеся к Г. т. работы, содержащие результаты, связанные с разл. приложениями математики. Так, Г. [Кирхгоф](#) (1847) для составления полной системы уравнений для токов и напряжений в электрич. сетях (см. [Кирхгофа правила](#)) предложил представлять такую сеть графом и находить в этом графе остовные деревья, что приводит к решению задачи выделения независимых систем уравнений. Деревом называется связный граф, не содержащий циклов (рис. 3), остовное дерево графа – это его подграф, представляющий собой дерево, множество вершин которого совпадает с множеством вершин

графа. А. [Кэли](#) (1854) для подсчёта числа изомеров предельных углеводородов пришёл к задачам описания и перечисления деревьев, обладающих заданными свойствами. Термин «граф» утвердился в математике после выхода монографии нем. математика Д. Кёнига (1936). Начиная со 2-й пол. 20 в. значительно расширились исследования в Г. т., в осн. в силу развития дискретной математики и вычислит. техники. Задание графа равносильно заданию на элементах множества вершин V некоторого бинарного отношения. По этой причине, а также ввиду возможности наглядного представления графа в виде чертежа на плоскости, графовые модели используются при построении алгоритмов решения разнообразных задач как в математике и естествознании, так и в гуманитарных науках.

Методы исследования в теории графов

Прежде всего выделяются комбинаторные методы теоретико-множественного анализа заданного бинарного отношения на множестве вершин. Весьма существенны (особенно в перечислительных задачах) алгебраические методы, в первую очередь методы теории групп (в частности, групп подстановок). При изучении укладок графа на плоскость привлекаются результаты топологич. характера. Случайные графы изучаются с помощью теоретико-вероятностных методов.

Особую роль при изучении графов играют матричные методы. Для графа G матрицей смежности $A=A(G)=||a_{ij}||$ называется матрица, в которой $a_{ij}=1$, если в графе G вершина i связана с вершиной j ребром (или дугой в ориентированном графе) и $a_{ij}=0$ в противном случае. В первом случае говорят, что вершины i и j смежны, во втором случае – что они несмежны. Маршрутом в графе G называется последовательность $v_0 e_1 v_1 \dots v_{n-1} e_n v_n$, состоящая попеременно из вершин и рёбер графа, в которой ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i , $i=1, \dots, n$; говорят, что этот маршрут связывает вершины v_0 и v_n . Маршрут, в котором $v_0=v_n$, называется циклом. Маршрут называется цепью (соответственно, простой цепью), если все его рёбра (все его вершины) различны. При $n \geq 1$ элемент на месте (i, j) в матрице A^n равен числу маршрутов длины n из вершины v_i в вершину v_j . Граф называется связным, если для любых его двух вершин существует маршрут, связывающий эти вершины. Для графа G с p вершинами и q рёбрами, в котором занумерованы как вершины, так и рёбра, рассматривается матрица инцидентности $B(G)$, представляющая собой матрицу, состоящую из нулей и единиц с двумя единицами в каждом столбце; в столбце, соответствующем ребру, соединяющему вершины i и j , единица стоит в строках с номерами i и j . Говорят, что каждая из вершин i и j и соединяющее их ребро инцидентны, два ребра смежны, если они имеют общую инцидентную им вершину. Ранг матрицы инцидентности $B(G)$ равен $p-1$, если граф G является связным графом.

Множество собств. значений матрицы смежности графа или ориентированного графа (при этом каждое значение берётся столько раз, какова его кратность) называется спектром графа. Спектр графа с n вершинами состоит из n действительных чисел. Изучение спектра графа позволяет выяснить мн. особенности его строения.

Задачи теории графов

Центральным в Г. т. является раздел, изучающий структурные свойства графов. Одной из характеристик структуры графа является последовательность степеней его вершин. Степенью вершины неориентированного графа называется число инцидентных ей рёбер. Графич. разбиением чётного натурального числа n называется представление его в виде суммы p слагаемых $n = \sum_{i=1}^p d_i$ такое, что существует граф с p вершинами, степени которых равны d_1, \dots, d_p . В Г. т. известен эффективный алгоритм, позволяющий для данного упорядоченного набора чисел (d_1, \dots, d_p) определить, существует ли граф с p вершинами v_1, \dots, v_p , для которых последовательность степеней $(d(v_1), \dots, d(v_p))$ совпадает с этим набором. Подробно изучено др. важное структурное свойство – связность графа, а также вопросы, относящиеся к существованию в связном графе маршрутов определённого вида.

Спец. разделом структурной Г. т. является факторизация графа, т. е. разложение графа $G=(V, E)$ на сумму факторов (подграфов) G_1, \dots, G_m с некоторым заданным свойством, где $G_i=(V, E_i)$ и $E=E_1 \cup \dots \cup E_m$ – разбиение множества рёбер на непустые непересекающиеся подмножества. Наиболее распространённые виды

факторизации: n -факторизация, где G_i – однородные графы степени n (графы, степени всех вершин которых одинаковы и равны n), и древесная факторизация, где каждая компонента любого G_i , $i=1, \dots, m$, является деревом. Любой полный граф K_{2n} , т. е. граф, в котором любые две вершины смежны, 1-факторизуем, но не 2-факторизуем; любой полный граф K_{2n+1} не является 1-факторизуемым, но представляется в виде суммы n факторов, являющихся циклами. Если при 1-факторизации речь идёт о возможности разбиения множества рёбер на подмножества, состоящие из попарно несмежных рёбер (при этом каждое из подмножеств есть 1-фактор), то всякое разбиение множества вершин графа на n подмножеств таких, что вершины из любых двух разных подмножеств попарно несмежны, определяет правильную раскраску графа в n цветов. Теория раскрасок графа возникла и развивалась в связи с четырёх красок задачей, которая получила решение лишь на рубеже 1970–80-х гг.

С графом $G=(V, E)$ естественно связывается целый ряд графов, напр. его подграфы, дополнительный граф, рёберный граф $L(G)$. Рёберным для графа G с p вершинами и q рёбрами называется граф с множеством вершин E , в котором две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра смежны в G . Критерий того, что данный граф является рёберным графом, заключается в отсутствии у него подграфов, принадлежащих множеству из 9 конкретно указанных графов (с 4, 5 или 6 вершинами). Изучение спец. классов графов, выделяемых к.-л. определяющим признаком или структурным свойством, составляет одно из направлений теории графов.

Если граф задан бинарным отношением на множестве, то часто возникает вопрос о том или ином его конкретном представлении. Такого рода задачей является задача о планарности графа, т. е. о возможности представить его на плоскости рисунком, в котором нет пересечения рёбер. Наиболее известный критерий планарности даёт теорема Понтрягина – Куратовского: граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве подграфа ни полного графа K_5 , ни двудольного графа $K_{3,3}$. Граф $G=(V, E)$ называется двудольным, если допускается разбиение вершин множества V на два подмножества V_1 и V_2 , состоящие из попарно несмежных вершин, такой граф обозначается G_{n_1, n_2} , где n_i – число вершин в подмножестве V_i , $i=1, 2$.

Значит. часть исследований в Г. т. составляют перечислительные и экстремальные задачи. Отд. класс экстремальных задач – задачи о покрытии. Осн. объектами исследования в задачах о покрытии являются четыре важнейшие теоретико-графовые константы: число вершинного покрытия α_0 , число рёберного покрытия α_1 , вершинное число независимости β_0 и рёберное число независимости β_1 . Число вершинного покрытия графа G есть миним. число вершин в покрывающем множестве, т. е. в таком множестве вершин, для которого каждое ребро графа G инцидентно хотя бы одной вершине этого множества. Вершинное число независимости графа G есть наибольшее возможное число элементов в независимом множестве, т. е. в таком множестве вершин, в котором любые две вершины несмежны. Аналогично определяются число рёберного покрытия и рёберное число независимости. Для любого связного графа G с $p > 1$ вершинами $\alpha_0 + \beta_0 = \alpha_1 + \beta_1 = p$, а для двудольного графа $\beta_1 = \alpha_0$. Значения этих констант известны лишь для некоторых графов частного вида. К задачам о покрытии тесно примыкает теория доминирования. В ней рассматриваются доминирующие множества графа $G=(V, E)$, т. е. такие подмножества $D \subset V$, что любая вершина из $V \setminus D$ смежна хотя бы с одной из вершин D . Важнейшей константой графа является число доминирования – наименьшее возможное число вершин в его доминирующем множестве.

Литература

Лит.: König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. N. Y., 1950;Берж К. Теория графов и ее применение. М., 1962; Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосиб., 1969;Харари Ф. Теория графов. М., 1973;Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., 1974;Камерон П., Линт Д. Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М., 1980;Оре О. Теория графов. 2-е изд. М., 1980;Цветкович Д., Дуб М., Закс Х. Спектры графов. Теория и применение. К., 1984; Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М., 2000;Колчин В. Ф. Случайные графы. 2-е изд. М., 2004;Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. 2-е изд. М., 2004.

Processing math: 0%