



# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Авторы: Е. С. Голод, Д. И. Пионтковский

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА, раздел алгебры, осн. объектом изучения которого являются производные функторы на разл. категориях алгебраич. объектов (см. [Категорий теория](#)). В разных разделах математики часто возникают последовательности [гомоморфизмов](#) абелевых групп (или, более общо, [модулей](#) над кольцом)  $\cdots C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$  в которых последовательное выполнение двух гомоморфизмов даёт нулевой гомоморфизм, т. е. для всякого  $n$  образ  $\text{Im } d_{n+1}$  содержится в ядре  $\text{Ker } d_n$ . Такие последовательности называются комплексами.

Примерами последовательностей  $C$  являются последовательности, в которых группы  $C_n$  порождаются простейшими геометрич. объектами (симплексами, клетками клеточного комплекса, сингулярными симплексами топологич. пространства), а гомоморфизмы  $d_n$  задаются переходом к границам соответствующих объектов (см. [Топология](#)), а также последовательности  $C$ , где  $C_n$  – пространства дифференциальных форм степени  $n$ , а отображения  $d_n$  задаются дифференцированием коэффициентов форм.

Гомоморфизмы  $d_n$  называют граничными отображениями, а также дифференциалами. Факторгруппы  $H_n(C) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$  называются группами гомологий комплекса  $C$ . Если все группы гомологий нулевые,  $H_n(C) = 0$  (т. е.  $\text{Ker } d_n = \text{Im } d_{n+1}$ ) для всех  $n$ , то последовательность  $C$  называется точной. Группы гомологий комплекса измеряют его отклонение от точной последовательности. Для конечного комплекса (когда  $C_n$  отличны от нуля лишь для конечного числа значений  $n$ ) при переходе от групп  $C_n$  к группам гомологий  $H_n(C)$  сохраняется эйлерова характеристика  $\chi(C) = \sum (-1)^n \text{rank } C_n$ , где  $\text{rank } C_n$  – ранг группы  $C_n$ . Простейшим, но нетривиальным частным случаем этого общего факта является теорема Эйлера, состоящая в том, что в трёхмерном пространстве число вершин выпуклого многогранника минус число его рёбер плюс число граней равно двум.

Понятие комплекса возникло в 1920-е гг. как обобщение важных инвариантов топологич. многообразий – чисел Бетти и коэффициентов кручения, введённых в кон. 19 в. в работах итал. математика Э. Бетти и А. Пуанкаре и являющихся одним из первых источников идей Г. а. Др. источником методов Г. а. явилась теория расширений групп (развитая в работах нем. математика О. Шрайера в 1920-х гг.). Она привела к построению групп гомологий для групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли и др. алгебраич. структур (в наиболее общем виде – гомологий алгебр над операдами). В основе их построения лежат спец. классы комплексов модулей. В алгебре одним из первых подобные конструкции стал систематически применять Д. Гильберт в кон. 19 в. Пусть  $f_1, \dots, f_m$  – многочлены от  $n$  переменных. Идеал, порождённый ими, не будет свободным модулем, поскольку между этими многочленами существуют соотношения (сизигии, в терминологии Гильберта), т. е. существуют векторы  $(a_1, \dots, a_m)$ , компонентами которых являются многочлены, такие, что  $f_1 a_1 + \dots + f_m a_m = 0$ . Множество  $\Omega^1$  таких соотношений также является модулем над кольцом многочленов и не обязательно свободным, т. к. между его порождающими снова имеются соотношения, образующие новый модуль  $\Omega^2$  и т. д. Теорема Гильберта

утверждает, что через  $n$  шагов этот процесс прекратится, т. е. что  $\Omega^{n-1}$  – свободный модуль, и можно взять  $\Omega^n = 0$ . Аналогичное утверждение верно, если считать  $f_1, \dots, f_m$  элементами любого модуля над кольцом многочленов от  $n$  переменных, только последовательность оборвётся на  $(n+1)$ -м шаге. На языке точных последовательностей эта теорема означает, что у произвольного модуля  $M$  над кольцом многочленов от  $n$  переменных имеется конечная свободная резольвента т. е. точная последовательность свободных модулей  $F_1, F_2, \dots$ , в которой модуль  $F_{n+1}$  можно выбрать нулевым.

О многих свойствах модулей и колец можно судить, зная только длины соответствующих резольвент. Так, проективная размерность модуля определяется как длина его наименьшей проективной резольвенты. Глобальной размерностью кольца  $R$  называется точная верхняя грань проективных размерностей  $R$ -модулей. Глобальная размерность равна нулю в точности для классич. полупростых колец. Конечность глобальной размерности коммутативного кольца в применении к кольцам функций на алгебраич. многообразиях позволяет характеризовать те многообразия, все точки которых неособы.

Во многих областях совр. математики используется наглядный язык Г. а., важнейшим инструментом которого наряду с комплексами и точными последовательностями служат коммутативные диаграммы – ориентированные графы, в которых вершины обозначают рассматриваемые объекты, стрелки – их отображения, причём композиции отображений, соответствующих двум путям в графе с общим началом и концом, совпадают. Напр., диаграмма 
$$\begin{CD} F'_{\bullet} @>f_{\bullet}>> F_{\bullet} @>V V @>V V @>f_{\bullet}>> M \end{CD}$$
 иллюстрирует тот факт, что любое отображение модулей  $f: M' \rightarrow M$  продолжается до морфизма их свободных резольвент  $f_{\bullet}: F'_{\bullet} \rightarrow F_{\bullet}$ .

Переход от модулей к резольвентам является необходимым этапом общей операции перехода от к.-л. исходного функтора к его производному функтору. Теория производных функторов была развита в монографии А. [Кармана](#) и франц. математика С. Эйленберга «Homological Algebra» (1956). Частными случаями в общей теории производных функторов являются как упомянутые выше группы гомологий в топологии и в алгебре, так и мн. конструкции, возникающие в комплексном анализе, алгебраической геометрии, теории представлений. Теория производных функторов позволила унифицировать подход к этим конструкциям и привела к созданию современного аппарата производных категорий.

Г. а. имеет многочисл. применения в таких областях математики, как алгебраич. теория чисел, алгебраическая и дифференциальная геометрия, топология, теория функций многих комплексных переменных, теория дифференциальных уравнений в частных производных, функциональный анализ, а также в теоретич. физике.

## Литература

Лит.: Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., 1960; Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М., 1961; Маклейн С. Гомология. М., 1966; Браун К. С. Когомологии групп. М., 1987; Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. М., 1988. Т. 1; Кузьмин Ю. В. Гомологическая теория групп. М., 2006.