ГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ

Авторы: П. В. Парамонов

ГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ в области

D евклидова

n-мерного пространства,

$n \geqslant 2$, действительная функция

$u(x) = u(x_1 \dots x_n)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta x_1^2} + \dots + \frac{\delta^2 u}{\delta x_n^2} = 0$$

Г. ф. широко используются в математич. физике. Это связано с тем, что на практике мн. стационарные (установившиеся) физич. процессы описываются потенциальными векторными полями, т. е. полями типа gradu(x), при этом условие гармоничности потенциала

u в области

D эквивалентно отсутствию источников соответствующего поля в

D. Так, напр., потенциал стационарного поля сил тяготения в области без притягивающих масс, потенциал электростатич. поля в области, не содержащей электрич. зарядов, потенциал поля скоростей безвихревого установившегося течения несжимаемой жидкости, темп-ра однородного тела при условии установившегося распределения темп-ры (без внутренних источников) суть Г. ф. В приложениях, как правило, встречаются Г. ф. трёх переменных [пространственных координат точки

$x = (x_1, x_2, x_3)$], а также Г. ф. двух переменных, которые появляются, когда, напр., функция

$u(x_1, x_2, x_3)$, описывающая исследуемое явление, не зависит от одной из координат.

Г. ф. двух переменных

$u(x, y)$ находятся в тесной связи с *аналитическими функциями*

$f(z)$ комплексного переменного

$z = x + iy$. Точнее, функция

$u(x, y)$ является гармонической в плоской односвязной области

D тогда и только тогда, когда она совпадает с действительной или мнимой частью некоторой аналитической в

D функции

$f(z)$.

Осн. свойствами Г. ф.

u в области

D являются бесконечная дифференцируемость

u в

D, теорема о ср. значении (для любого шара

B, лежащего в

D, значение

u в центре шара равно ср. значению

u по этому шару и равно ср. значению по поверхности сферы, ограничивающей шар

B), принцип экстремума (непостоянная Г. ф.

u не может иметь локальных максимумов и минимумов внутри

D), свойство единственности (Г. ф.

u в любой точке

$x \in D$ однозначно определяется своими значениями в сколь угодно малой окрестности произвольной фиксированной точки

$a \in D$).

В теории Г. ф. особую роль играют т. н. фундам. решения уравнения Лапласа, с помощью которых, в частности, решаются осн. краевые и граничные задачи теории Г. ф. в областях с гладкой границей. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*, *Потенциала теория*.

Литература

Лит.: Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М., 1966; Келдыш М. В. Математика. Избранные труды. М., 1985; Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 5-е изд. М., 1988; Axler S., Bourdon P., Ramey W. Harmonic function theory. 2nd ed. N. Y., 2001.