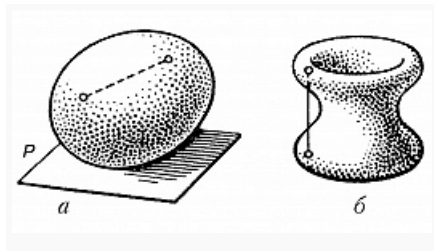


ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО

Авторы: Э. Г. Позняк



ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО, геометрич. тело, обладающее тем свойством, что отрезок, соединяющий две его любые точки, содержится в нём целиком. На рис. а тело выпукло, на рис. б – не выпукло. Примерами В. т. являются шар, куб, шаровой сегмент. Любая связная часть границы (см. [Связное множество](#)) В. т. называется выпуклой поверхностью. Через каждую точку границы В. т. проходит по крайней мере одна опорная плоскость, т. е.

плоскость, имеющая общую точку (или отрезок, или часть плоскости) с границей тела, но не пересекающая его (плоскость Р на рис. а). В точках, где граница В. т. – гладкая поверхность, опорная плоскость будет касательной плоскостью. В тех точках, где гладкость нарушается (напр., в вершине куба), существует бесконечно много опорных плоскостей. В. т. могут быть пяти типов: конечные (граница – замкнутая выпуклая поверхность), бесконечные (граница – одна бесконечная поверхность; напр., В. т., ограниченное параболоидом), бесконечные в обе стороны цилиндры (граница – замкнутая выпуклая цилиндрич. поверхность; напр., бесконечный круговой цилиндр), слои между парами параллельных плоскостей, всё пространство. Основы теории В. т. были заложены в кон. 19 в. нем. математиками Г. Брунном и Г. [Минковским](#). Важнейшие новые результаты этой теории были получены А. Д. [Александровым](#) и А. В. [Погореловым](#).

Простейшими В. т. являются выпуклые многогранники, т. е. В. т., ограниченные конечным числом многоугольников. Для любого конечного В. т. можно построить как угодно близкие к нему выпуклые многогранники. Это позволяет решать многие задачи о В. т. следующим образом: задача решается для выпуклых многогранников, а затем с помощью предельного перехода соответствующий результат переносится на любое В. т. Так, напр., определяются площади выпуклых поверхностей и объёмы В. т. В частности, устанавливается, что если одно конечное В. т. охватывает другое, то площадь поверхности первого больше площади поверхности второго. Этот подход был предложен А. Д. Александровым (1948) и применён для решения разл. задач теории выпуклых тел.

Общая теория В. т. и выпуклых поверхностей составляет т. н. геометрию В. т., включающую исследование общих свойств В. т. (теоремы об опорных плоскостях, классификация В. т., приближение многогранниками), изучение экстремальных свойств В. т. (напр., шар среди всех В. т. с заданным объёмом имеет миним. поверхность), теоремы о существовании и единственности В. т. с заданными свойствами, свойства разл. классов В. т., а также изучение общих свойств выпуклых поверхностей, теоремы существования и единственности для выпуклых поверхностей.

Понятие В. т. естественно возникает и в геометрии пространств постоянной кривизны. Многие перечисленные выше задачи формулируются и решаются для В. т. в таких пространствах. Методы и результаты теории В. т. используются в различных разделах математики: в геометрии, теории чисел, математическом анализе.

Литература

Лит.: Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л., 1948; он же. Выпуклые многогранники. М.; Л., 1950; Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., 1969.