



Авторы: Е. А. Рахманов

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (*)$$

При фиксированных n, m существует единственная П. а. $\pi_{\{n,m\}}$ ряда (*). Таблица $\{\pi_{\{n,m\}}\}^{\infty}_{n,m=0}$ называется таблицей Паде ряда (*). Последовательности $\{\pi_{\{n,m\}}\}^{\infty}_{n=0}$ называются строками таблицы Паде (нулевая строка совпадает с последовательностью многочленов Тейлора для f), $\{\pi_{\{n,m\}}\}^{\infty}_{m=0}$ – столбцами таблицы Паде, $\{\pi_{\{n+j,n\}}\}^{\infty}_{n=0}$ – диагоналями таблицы Паде. Наиболее важному случаю гл. диагонали соответствует $j=0$.

Вычисление функции $\pi_{\{n,m\}}$ сводится к решению системы линейных уравнений, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты $f_k, k=0,1,\dots,n+m$, заданного ряда. Если отличен от нуля определитель Ганкеля $\Delta_{\{n,m\}} = \begin{vmatrix} f_{-n-m+1} & f_{-n-m+2} & \dots & f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}$, то знаменатель $q_{\{n,m\}}$ функции $\pi_{\{n,m\}}$ определяется по формуле $q_{\{n,m\}} = \frac{1}{\Delta_{\{n,m\}}} \begin{vmatrix} & & & & f_{n+1} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & & \Delta_{\{n,m\}} \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & f_{n+m} \end{vmatrix} z^n \dots z+1$, при этом $q_{\{n,m\}}(0)=1$. Явная формула может быть выписана и для числителя функции $\pi_{\{n,m\}}$.

Справедливо равенство $(f - \pi_{\{n,m\}})(z) = A_{\{n,m\}} z^{n+m+1} + \dots$. Последнее соотношение иногда принимают в качестве определения П. а.; в этом случае П. а. могут не существовать для некоторых пар (n, m) . Для обозначения П. а. типа (n, m) заданного ряда f часто употребляют символ $[n/m] = [n/m]_f$.

Для эффективного вычисления П. а. удобнее пользоваться не явными формулами, а рекуррентными соотношениями, существующими в таблице Паде. Разработано большое число алгоритмов для машинного вычисления аппроксимаций Паде.

Название П. а. получила по имени франц. математика А. Паде, применявшего её (1892) в рамках классич. теории непрерывных дробей. Частные случаи П. а. изучались начиная с 1820 О. [Коши](#), К. [Якоби](#), Ф. Г. [Фробениусом](#).
Фундам. результаты о диагональных П. а. получены П. Л. [Чебышевым](#), А. А. [Марковым](#) и Т. [Стилтьесом](#). С нач.

20 в. П. а. стала самостоят. объектом анализа и составляет важную часть теории рациональных приближений аналитич. функций. С помощью П. а., при построении которой используются локальные данные (коэффициенты степенного ряда), можно получать результаты о глобальных свойствах соответствующей аналитич. функции (аналитич. продолжение, характер и расположение особенностей и т. д.) и вычислять значение функции за пределами круга сходимости степенного ряда.

Литература

Лит.: Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М., 1968; Гончар А. А., Рахманов Е. А., Суетин С. П. Аппроксимации Паде – Чебышева для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов // Успехи математических наук. 2011. Т. 66. Вып. 6.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/MathOperators.js