



НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД

НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД, применяется для вычисления коэффициентов в выражениях, у которых численные значения некоторых постоянных неизвестны. Напр., для вычисления неопределённого интеграла от функции $\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$ её удобно представить в виде суммы дробей с постоянными числителями и знаменателями x , $x-1$ и $x+1$, т. е. в виде $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$, где A, B и C – некоторые числа (коэффициенты, подлежащие определению). Чтобы найти их, приравнивают два выражения для указанной функции, т. е. пишут $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$ и, освобождаясь от знаменателей, получают равенство $(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A = 3x^2 - 1$ и требуют, чтобы оно выполнялось при всех x . Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях совпадают. Так получаются три уравнения для определения трёх неизв. коэффициентов: $A+B+C=3$, $B-C=0$, $-A=1$, откуда $A=B=C=1$. Поэтому $\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; справедливость этого равенства легко проверить непосредственно. Успех применения Н. к. м. зависит от правильности выбора выражений, коэффициенты которых отыскиваются.

Особенно важны применения Н. к. м. к задачам, в которых множество неизвестных коэффициентов бесконечно. К ним относятся, напр., задача деления степенных рядов и задача нахождения решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда. Пусть нужно найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$ такое, что $y' = 1$ при $x=0$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение этого уравнения с указанным условием имеет вид степенного ряда $y = x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots$; что даёт для y'' выражение $2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + 5 \cdot 4c_5x^3 + \dots$.

Подставляя его и выражение для произведения xy в левую часть исходного уравнения, после приведения подобных членов получают равенство $2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + (4 \cdot 3c_4 + 1)x^2 + (5 \cdot 4c_5 + c_2)x^3 + \dots = 0$, откуда для определения неизв. коэффициентов получают бесконечную систему уравнений: $2c_2 = 0$, $3 \cdot 2c_3 = 0$, $4 \cdot 3c_4 + 1 = 0$, $5 \cdot 4c_5 + c_2 = 0$, \dots . Решая эти уравнения последовательно, находят $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = -\frac{1}{3 \cdot 4}$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_7 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$, \dots ; то есть $y = x - \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$.