



НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, приёмы и методы решения задач, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из приводимых ниже условий. Задача определения решения уравнения $z=R(u)$, где z – элемент *метрического пространства* Z (с расстоянием ρ_Z), по «исходным данным» u из метрич. пространства U (с расстоянием ρ_U), называется корректно поставленной на паре пространств (Z, U) , если: а) для любого $u \in U$ существует решение $z \in Z$; б) решение определено однозначно; в) задача устойчива на паре (Z, U) , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $u_1, u_2 \in U$ из неравенства $\rho_U(u_1, u_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_Z(z_1, z_2) \leq \varepsilon$, где $z_1=R(u_1), z_2=R(u_2)$. Это понятие корректности принадлежит Ж. *Адамару* (1923), который считал, что всякая математич. задача, соответствующая к.-л. физич. или технич. задаче, должна быть корректной, поскольку в противном случае при сколь угодно малых изменениях исходных данных решения могут сильно отличаться, чему нельзя дать физич. интерпретацию. Однако такая точка зрения, естественная для мн. задач естествознания и техники, не может быть перенесена на все задачи. Например, неустойчивыми являются задачи дифференцирования функций, известных приближенно, численного суммирования рядов Фурье, когда их коэффициенты известны приближенно, задача Коши для уравнения Лапласа.

К некорректным задачам относится широкий класс т. н. обратных задач, возникающих в физике и технике, в частности задачи обработки результатов физич. экспериментов. Пусть величина z – количественная характеристика (функция, вектор) изучаемого явления (объекта), часто о величине z известно, что она принадлежит некоторому подмножеству M метрич. пространства Z . В физич. эксперименте величина z часто недоступна непосредств. измерению, а измеряется лишь её проявление $u=Az$. Для интерпретации результата измерения необходимо определять z по u , т. е. решать уравнение $Az=u$; (1)

Если $u \in AM$, где AM – образ M при его отображении с помощью оператора A , то решение этого уравнения есть $z=A^{-1}u$, где A^{-1} – оператор, обратный оператору A . Так как элемент u часто получают путём измерений, то он обычно бывает известен лишь приближенно; пусть \tilde{u} – его приближенное значение. В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к z) «решения» уравнения $Az=\tilde{u}$; (2)

Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным. В этих случаях в качестве приближенного решения уравнения (1) нельзя брать точное решение уравнения (2), т. е. элемент z , так как: а) такого решения может не существовать на M , поскольку z может не принадлежать множеству AM ; б) такое решение, даже если оно существует, может не обладать свойством устойчивости к малым изменениям (поскольку обратный оператор A^{-1} не является непрерывным) и поэтому не может быть физически интерпретируемым. Задача (2) является некорректной.

Для некорректных задач вида (1), (2) возникают вопросы: а) что понимается под приближенным решением таких задач? и б) каковы алгоритмы построения решений? Эти вопросы были впервые рассмотрены А. Н. *Тихоновым*

(1963).

Метод подбора. В некоторых случаях приближенные решения уравнения (1) находятся методом подбора. Он состоит в том, что из множества M возможных решений, $M \subset Z$, выбирают элемент \tilde{z} , для которого $A\tilde{z}$ приближает правую часть уравнения (1) с заданной точностью, и в качестве искомого приближения берут элемент \tilde{z} . Этот метод применим, когда из неравенства $\rho_U(A\tilde{z}, Az) \leq \delta$ следует, что $\rho_Z(\tilde{z}, z) \leq \varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Это имеет место при условии однозначной разрешимости уравнения (1) и при условии, что множество M – компакт. На основе этих условий вводится понятие корректности по Тихонову, называемое также условной корректностью. В применении к уравнению (1) задача называется корректной по Тихонову, если известно, что для точного значения u правой части существует единственное решение z уравнения (1), принадлежащее заданному компактному M . В этом случае оператор A^{-1} непрерывен на множестве M и если вместо элемента u известен элемент u_δ такой, что $\rho_U(u_\delta, u) \leq \delta$ и $u_\delta \in AM$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с правой частью $u = u_\delta$ можно брать элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. При этом $z_\delta \rightarrow z$, если $\delta \rightarrow 0$.

Во многих случаях приближенно известная часть \tilde{u} уравнения (2) не принадлежит множеству AM . В этих условиях уравнение (2) не имеет классич. решения и в качестве его приближенного решения берётся обобщённое решение, называемое квазирешением. Элемент $\tilde{z} \in M$, минимизирующий при данном \tilde{u} функционал $\rho_U(Az, \tilde{u})$ на множестве M , называется квазирешением уравнения (2) на M . Если M – компакт, то квазирешение существует для любого $\tilde{u} \in U$, а если $\tilde{u} \in AM$, то квазирешение \tilde{z} совпадает с классическим (точным) решением уравнения (2). Существование квазирешения гарантируется лишь при условии компактности множества M возможных решений.

Метод регуляризации. Для ряда прикладных задач, приводящих к уравнению (1), характерна ситуация, когда множество M возможных решений не является компактом, оператор A^{-1} не является непрерывным на AM и изменения правой части этого уравнения, связанные с её приближенным характером, могут выводить её за пределы множества AM . Такие задачи называются существенно некорректными. Разработан подход к решению таких задач, называемый методом регуляризации. В дальнейшем для простоты предполагается, что приближенной является лишь правая часть уравнения (1). В основе подхода лежит понятие регуляризирующего оператора. Оператор $R(u, \alpha)$ из U в Z , зависящий от параметра α , называется регуляризирующим оператором для уравнения $Az = u$ (в окрестности точки u), если он обладает свойствами: 1) существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(u, \alpha)$ определен для любого $\alpha > 0$ и любого $u_\delta \in U$, для которого $\rho_U(u_\delta, u) \leq \delta \leq \delta_1$; 2) существует функция $\alpha = \alpha(\delta)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) \leq \delta_1$ такое, что если $u_\delta \in U$ и $\rho_U(u_\delta, u) \leq \delta(\varepsilon)$, то $\rho_Z(z_\delta, z) \leq \varepsilon$, где $z_\delta = R(u_\delta, \alpha(\delta))$. В этом определении не предполагается однозначности оператора $R(u, \alpha)$.

Если $\rho_U(u_\delta, u) \leq \delta$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с правой частью u_δ можно брать элемент $z_{\alpha(\delta)} = R(u_\delta, \alpha(\delta))$, где $\alpha(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ . Это решение называется регуляризованным решением уравнения $Az = u_\delta$, а параметр α называется параметром регуляризации. При $\delta \rightarrow 0$ регуляризованное решение сходится к решению уравнения (1). Т. о., задача нахождения приближенных решений уравнения (1) сводится к нахождению регуляризирующего оператора и к определению параметра регуляризации по дополнительной информации о задаче, напр. по оценке погрешности δ , с которой задаётся правая часть (1).

В основе построения регуляризирующих операторов лежат разл. принципы, среди них – вариационный, при котором используется сглаживающий функционал $M^\alpha(z, A, u) = \rho^2 U(Az, u) + \alpha \Omega(z)$, где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, а Ω – регуляризирующий функционал, предназначенный для стабилизации решения. Он выбирается так, чтобы множества $\{z: \Omega(z) \leq c\}$ при всех $c > 0$ были компактными в пространстве Z . Ищется элемент z_α , минимизирующий M^α на множестве возможных решений. Параметр α находится по дополнит. информации о задаче.

Литература

Лит.: Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978; Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишацкий С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980; Тихонов А. Н., Арсеньев В. Я. Методы решения некорректных задач. 3-е изд. М., 1986.

Processing math: 0%