



МОМЕНТ

Авторы: А. В. Прохоров

МОМЕНТ случайной величины, числовая характеристика [распределения вероятностей](#). М. порядка k , k – натуральное число, действительной случайной величины X определяется как [математическое ожидание](#) $\mathsf{E} X^k$ случайной величины X^k , если оно существует. Если $F(x)$ – функция распределения случайной величины X , то $\mathsf{E} X^k = \int \limits_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$ при условии, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если X принимает значения x_1, x_2, \dots с вероятностями p_1, p_2, \dots , то $\mathsf{E} X^k = \sum \limits_{k=1}^{\infty} x^k p_k$ при условии, что ряд сходится абсолютно; если распределение X имеет плотность $p(x)$, то $\mathsf{E} X^k = \int \limits_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$ при условии, что интеграл сходится абсолютно.

Величина $\mathsf{E}(X-a)^k$ называется моментом порядка k относительно a , $\mathsf{E}(X-\mathsf{E} X)^k$ – центральным моментом порядка k . Центральный М. 2-го порядка $\mathsf{E}(X-\mathsf{E} X)^2$ называется [дисперсией](#) и обозначается $\mathsf{D} X$. Величина $\mathsf{E} |X|^k$, k – положительное число, называется абсолютным моментом случайной величины X порядка k . По определению считается, что М. и абсолютный М. нулевого порядка любой случайной величины равны единице.

Для абсолютных моментов справедливо неравенство Ляпунова ($\mathsf{E} |X|^s)^{1/s} \leq (\mathsf{E} |X|^k)^{1/k}$, при $0 < s < k$, полученное А. М. [Ляпуновым](#) (1900), из которого следует, в частности, что из существования момента порядка k следует существование всех моментов меньших порядков.

М. порядка k совместного (многомерного) распределения случайных величин X_1, \dots, X_n определяется как $\mathsf{E}(X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n})$, где $k_i, i=1, \dots, n$, – неотрицательные целые числа, $k_1 + \dots + k_n = k$, и называется смешанным моментом порядка k , а $\mathsf{E}(X_1 - \mathsf{E} X_1)^{k_1} \dots (X_n - \mathsf{E} X_n)^{k_n}$ – центральным смешанным моментом порядка k . Смешанный М. $\mathsf{E}(X_1 - \mathsf{E} X_1)(X_2 - \mathsf{E} X_2)$ называется [ковариацией](#) и служит одной из осн. характеристик зависимости между случайными величинами.

Если известны М. распределения, то можно сделать некоторые утверждения о вероятностях отклонения случайной величины от её математич. ожидания в терминах неравенств; наиболее известны [Чебышева неравенство](#) $\mathsf{P} \{ |X - \mathsf{E} X| \geq \varepsilon \} \leq \frac{\mathsf{D} X}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$, и его обобщения. Значения моментов случайных величин входят в формулировки мн. утверждений теории вероятностей.

Задача, состоящая в определении распределения вероятностей последовательностью его М., носит назв. проблемы моментов. Эта задача впервые рассматривалась П. Л. [Чебышевым](#) (1874) в связи с исследованиями по предельным теоремам теории вероятностей. Для того чтобы распределение вероятностей случайной величины однозначно определялось своими М. $\alpha_k = \mathsf{E} X^k, k=1, 2, \dots$, достаточно, напр., выполнения условия Карлемана $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k})^{-1/(2k)} = \infty$. Одним из простейших примеров распределения, которое не определяется однозначно своими М., является [логарифмически-нормальное распределение](#).

В математич. статистике для статистич. оценки параметров распределения служат выборочные моменты
(см. [Выборочная характеристика](#)).

Литература

Лит.: Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 10-е изд. М., 2010; Ширяев А. Н. Вероятность-1. 5-е изд. М., 2011.

Кн. 1.

Processing math: 0%