



# МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЯ

МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЯ, раздел математики, возникший при применении методов математич. логики в алгебре. Во 2-й пол. 20 в. М. т. оформилась в самостоят. дисциплину, методы и результаты которой находят применение как в алгебре, так и в др. разделах математики. Осн. понятия М. т. – понятия алгебраич. системы, [формализованного языка](#), истинности высказывания рассматриваемого языка в данной алгебраич. системе. Примером алгебраич. системы является система натуральных чисел вместе с операциями сложения и умножения, отношением порядка и выделенными элементами 0, 1. Простейшие высказывания об этой системе – высказывания типа « $x+y=z$  при  $x=2, y=3, z=5$ », « $x \cdot y=z$  при  $x=4, y=2, z=8$ », « $x \leq y$  при  $x=2, y=3$ ». Более сложные высказывания получаются из простейших при помощи пропозициональных связок «и», «или», «если..., то...», «не», а также [кванторов](#)  $\forall x$  (для каждого  $x...$ ),  $\exists x$  (существует такое  $x$ , что...). Напр., утверждение, что числа  $u$  и  $v$  взаимно просты, записывается в виде: «для каждого  $x, y$  и  $z$ , если  $u=x \cdot y$  и  $v=x \cdot z$ , то  $x=1$ » и получается из простейших при помощи пропозициональных связок и кванторов.

В общем случае под алгебраич. системой понимается непустое множество вместе с заданными на этом множестве совокупностями отношений и операций от конечного числа аргументов. Эти операции и отношения называются основными в алгебраич. системе. Каждой такой операции и каждому такому отношению ставится в соответствие определённый символ. Набор  $\Omega$  этих символов называется сигнатурой алгебраич. системы. Обычно изучаются классы алгебраич. систем одной сигнатуры.

Важнейшими из формализованных языков являются языки 1-й степени. Алфавит такого языка состоит из набора  $\Omega$  символов отношений и операций; знаков  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ , обозначающих пропозициональные связки и кванторы; набора символов, называемых предметными переменными, а также скобок и запятой. При этом каждому символу отношения или операции приписывается натуральное число, называемое арностью (местностью) этого символа; оно равно числу аргументов той операции или того отношения, которым соответствует рассматриваемый символ. В число символов отношений включается спец. символ  $=$  для отношения равенства. Индуктивно определяются понятия термина и формулы. Предметные переменные являются терминами. Если  $f$  – символ  $n$ -арной операции, а про  $g_1, \dots, g_n$  уже известно, что они термы, то  $f(g_1, \dots, g_n)$  есть тоже терм. Простейшие формулы – выражения вида  $P(g_1, \dots, g_n)$ , где  $P$  есть  $n$ -арный символ отношения, а  $g_1, \dots, g_n$  – термы. Более сложные формулы получаются из простейших с помощью конечного числа связываний их знаками кванторов и пропозициональных связок. Символы предметных переменных, встречающиеся в формуле, разделяются на свободные и связанные. Связанные находятся в области действия квантора по этому переменному, а остальные свободные. Напр., в формуле  $(\forall x)(\exists y)(f(x, y)=z \vee f(x, y)=u)$  свободными являются  $z$  и  $u$ , а  $x$  и  $y$  связаны кванторами. Формулы без свободных переменных называются высказываниями. Каждая формула со свободными переменными  $x_1, \dots, x_n$  на каждой алгебраич. системе  $A$  сигнатуры  $\Omega$  определяет  $n$ -арное отношение. Напр., формула, записывающая утверждение, что числа  $u$  и  $v$  взаимно простые, определяет на натуральных числах отношение взаимной простоты, которое для пары (3, 5) истинно, а для пары (2, 4) ложно. Для простейших формул соответствующее отношение фактически задаётся

самой системой  $A$ . Для более сложных формул соответствующее отношение определяется путём интерпретации кванторов и пропозициональных связок:  $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$  интерпретируется как « $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ »,  $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$  – как « $\Phi_1$  или  $\Phi_2$ »,  $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$  – как «если  $\Phi_1$ , то  $\Phi_2$ »,  $\neg \Phi$  – как «неверно, что  $\Phi$ »,  $(\forall x)\Phi$  – как «для всех  $x$   $\Phi$ »,  $(\exists x)\Phi$  – как «существует  $x$ , для которого  $\Phi$ ». Согласно этому определению, каждое высказывание в каждой алгебраич. системе соответствующей сигнатуры либо ложно, либо истинно. Напр., если символу  $f$  ставится в соответствие операция сложения на натуральных числах, то формула  $(\forall x) f(x, x) = f(f(x, x), x)$ , утверждающая, что  $2x = 3x$  для всех  $x$ , ложна на натуральных числах, а формула  $(\forall x)(f(x, x) = x \rightarrow f(x, x) = f(f(x, x), x))$ , утверждающая, что если  $2x = x$ , то  $2x = 3x$ , истинна. Алгебраич. система  $A$  называется моделью данного множества  $\Sigma$  высказываний, если каждое высказывание из  $\Sigma$  истинно в  $A$ . Класс  $K$  алгебраич. систем называется аксиоматизируемым, если  $K$  есть совокупность всех моделей некоторого множества высказываний. Многие важные классы алгебраич. систем, напр. классы групп, колец, полей, аксиоматизируемы.

Изучение общих свойств аксиоматизируемых классов – важная часть М. т. Во многих случаях по форме высказываний из  $\Sigma$  удаётся судить о некоторых алгебраич. свойствах класса всех моделей  $\Sigma$ . Напр., тот факт, что гомоморфные образы и прямые произведения групп снова оказываются группами, есть следствие того, что класс групп может быть определён как совокупность всех моделей такой совокупности высказываний  $\Sigma$ , что каждое высказывание из  $\Sigma$  имеет вид  $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) f = g$ , где  $f, g$  – термы.

Фундам. результат М. т. – локальная теорема Мальцева (1936), согласно которой если каждая конечная подсовокупность совокупности  $\Sigma$  высказываний имеет модель, то и  $\Sigma$  имеет модель. А. И. [Мальцев](#) нашёл многочисл. применения этой теоремы для доказательства т. н. локальных теорем алгебры.

Важным фактом в теории аксиоматизируемых классов является теорема Лёвенгейма – Сколема: всякий аксиоматизируемый класс конечной или счётной сигнатуры, содержащий бесконечные системы, содержит и счётную систему. В частности, нельзя указать такую совокупность высказываний, все модели которой были бы изоморфны одной бесконечной алгебраич. системе, напр. полю комплексных чисел или кольцу целых чисел. Однако существуют аксиоматизируемые классы, все системы которых данной бесконечной мощности изоморфны.

Одной из важных конкретных совокупностей высказываний является совокупность, определяющая понятие множества. Это понятие описывается на языке 1-й степени, сигнатура которого состоит из одного символа – символа бинарного отношения, интерпретируемого как « $x$  есть элемент  $y$ ». Существует неск. вариантов таких описаний, каждый из которых осуществляется при помощи своей совокупности высказываний. Эти совокупности называются системами аксиом теории множеств. Развитие М. т. показало, что нельзя выбрать такую систему аксиом для теории множеств, которая удовлетворила бы все потребности математики (см. также

[Аксиоматическая теория множеств](#)).

## Историческая справка

Осн. понятия М. т. возникли в математике в 19 в., гл. обр. в работах по основаниям геометрии. К понятию модели данного множества высказываний вплотную подошёл Н. И. [Лобачевский](#) в работах по геометрии. В полной мере оно проявилось в трудах Э. [Бельтрами](#) и Ф. [Клейна](#), построивших модели геометрии Лобачевского, и Д. [Гильберта](#), сформулировавшего полную систему аксиом элементарной геометрии. М. т. развивалась как самостоят. раздел логики в нач. 1930-х гг. в работах норв. математика Т. А. Сколема, К. [Гёделя](#), А. [Тарского](#) и

А. И. Мальцева. Центр. понятия и результаты М. т. сложились к 1960-м гг., важную роль в развитии М. т. сыграли школы А. Тарского и А. Робинсона в США и А. И. Мальцева в СССР.

Центральная часть совр. М. т. — это изучение элементарных теорий, т. е. теорий, описываемых на языке 1-й ступени. Однако изучаются и теории, описываемые при помощи более богатых языков. Для совр. этапа развития характерно проникновение в М. т. геометрич. идей и методов. Новым, активно развивающимся направлением также является теория конечных моделей, связанная с исследованием сложности вычислений и имеющая важные приложения в информатике.

## Литература

Лит.: Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М., 1967; Мальцев А. И.

Алгебраические системы. М., 1970; Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. М., 1977.

Processing math: 0%