МНОГООБРА́ЗИЕ

МНОГООБРА́ЗИЕ, многомерное обобщение понятий линии и поверхности без особых точек. Топологич. многообразием размерности n называется *топологическое пространство* M, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому шару $x^2_1+ ...+x^2_n< 1$ n-мерного евклидова пространства ${\bf R}^n$. Обычно предполагают также, что M покрывается конечным или счётным числом окрестностей такого рода и что M отделимо, т. е. любые две его точки обладают непересекающимися окрестностями.

Разнообразные примеры М. размерностей 1, 2 и 3 встречаются в геометрии. Прямая, открытый интервал, парабола, окружность, эллипс – одномерные М. Любая область на плоскости, сама плоскость, параболоид, сфера, эллипсоид, тор и т. п. – двумерные М. Поверхность конуса не является М., т. к. вершина конуса, в которой сходятся две его полости, не имеет окрестности, гомеоморфной кругу. Обычное трёхмерное евклидово пространство, а также любая область в нём – трёхмерное многообразие.

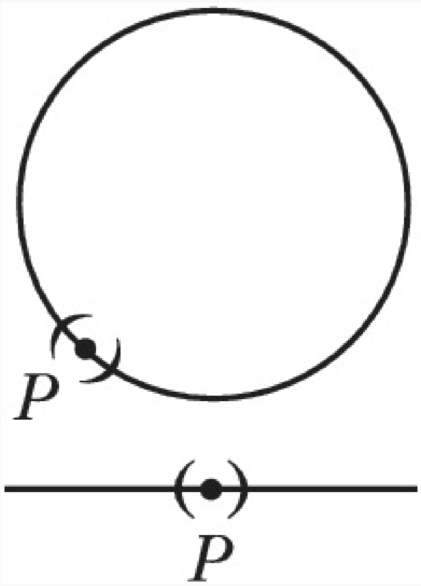

Рис. 1.

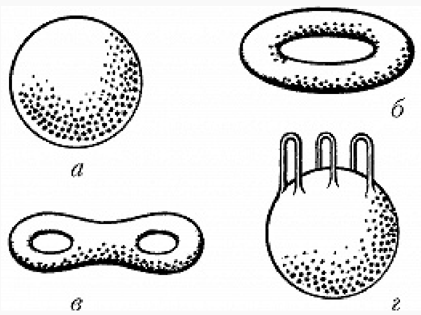

Рис. 2.

Введение в математику понятия М. любого числа измерений было вызвано весьма разнообразными потребностями геометрии, математич. анализа, механики и физики. Это понятие применимо практически во всех ситуациях, когда рассматриваемые объекты могут быть параметризованы системами действительных чисел. Точками возникающих при этом М. могут быть объекты любой природы – прямые, сферы, матрицы, состояния механич. системы и пр.

М. называется замкнутым, если оно компактно, и открытым в противном случае. Каждое замкнутое М. размерности 1 гомеоморфно окружности, а каждое открытое – прямой (на рис. 1 изображены одномерные М. и окрестности точки P на каждом из них). В случае двух измерений уже замкнутые М. довольно разнообразны. Они распадаются на бесконечное число топологич. типов: сфера – поверхность рода 0 (рис. 2, а), тор – поверхность рода 1 (рис. 2, б), «крендель» – поверхность рода 2 (рис. 2, в), вообще «сфера с n ручками» – поверхность рода n (на рис. 2, г изображена такая поверхность при $n=3$). Этими примерами исчерпываются все топологич. типы замкнутых двумерных ориентированных М. Существует ещё бесконечное число замкнутых двумерных неориентируемых М. – односторонних поверхностей, напр. проективная плоскость, *Клейна поверхность*. Имеется классификация открытых двумерных М. Полная классификация М. трёх измерений не найдена (даже для случая замкнутых М.).

Определение топологич. М. не даёт возможности определить дифференцируемые функции и др. понятия математич. анализа на М. Чтобы эти понятия приобрели смысл, необходимо ввести на М. дополнит. структуру. В окрестности любой точки n-мерного топологич. М. существуют локальные координаты $x_1,...,x_n$, однозначно определяющие положение точки этой окрестности. Если выбрать локальные координаты в окрестности любой точки М. таким образом, что две разные системы локальных координат в пересекающихся окрестностях выражаются друг через друга при помощи функций класса $C^k, k\geqslant 1$, то получится гладкая структура класса k. Обычно берут $k=\infty$ и М. с гладкой структурой называют дифференцируемым (или гладким) М. Дифференцируемые М. имеют большое значение в совр. математике, поскольку именно они наиболее широко используются в приложениях и смежных областях (см. *Дифференциальная геометрия*). На одном и том же топологич. М. могут существовать разл. (и даже не изоморфные) гладкие структуры. Аналогично вводится понятие аналитич. М. Если считать локальные координаты комплексными числами и потребовать, чтобы они выражались друг через друга при помощи аналитич. функций, то получится понятие комплексного (аналитического) многообразия.

Понятие многомерного М. впервые сформулировано Б. *Риманом* в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854). В 1913 Г. *Вейль* ввёл понятие (абстрактной) римановой поверхности, т. е. одномерного комплексного М. (с каждой аналитич. функцией комплексного переменного связывается такое М., называемое римановой поверхностью этой функции).

В совр. математике рассматриваются также разл. обобщения понятия М. Таковы, напр., М. с краем (типичным примером которых является замкнутый шар $x^2_1+ ...+x^2_n\leqslant 1$ в пространстве ${\bf R}^n$), а также аналитич. пространства (включающие в себя вещественные или комплексные аналитич. поверхности с особыми точками).

Литература

Лит.: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. М., 1982; Введение в топологию. 2-е изд. М., 1995; Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.Современная геометрия. 5-е изд. М., 2001. Т. 2.