



МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА

Авторы: В. Б. Кудрявцев

МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА, раздел [математической логики](#), изучающий математич. модели [логики высказываний](#). Эти модели отражают две осн. черты последней – множественность значений истинности высказываний и возможность построения новых, более сложных высказываний из заданных при помощи логич. операций, которые позволяют по значениям истинности исходных высказываний устанавливать значение истинности сложных высказываний. Примерами многозначных высказываний являются суждения с модальным исходом («да», «нет», «может быть») и суждения вероятностного характера, а примерами логич. операций – логич. связки типа «и», «или», «если..., то». В общем случае модели М. л. представляют собой обобщения [алгебры логики](#). В алгебре логики высказывания принимают только два значения истинности («да», «нет»), в связи с чем она в общем случае не может отразить всего многообразия логич. построений, встречающихся на практике. При достаточно широком толковании М. л. в неё иногда включают также логические [исчисления](#).

Исторически первыми моделями М. л. явились двузначная логика Дж. Буля (называемая также алгеброй логики), трёхзначная логика Я. Лукасевича (1920) и m -значная логика Э. Поста (1921). Изучение этих моделей составило важный этап в создании теории М. л. Определённая специфика М. л. состоит в рассмотрении задач и подходов, возникающих при исследовании М. л. с позиций математич. логики, теоретич. кибернетики и алгебры. Так, с позиций теоретич. кибернетики модели М. л. рассматриваются как языки, описывающие функционирование сложных управляющих систем, компоненты которых могут находиться в некотором числе разл. состояний; с точки зрения алгебры модели М. л. представляют собой алгебраич. системы, имеющие, наряду с прикладным, и чисто теоретич. интерес.

Построение моделей М. л. осуществляется по аналогии с построением двузначной логики. Так, индивидуальные высказывания логики, разбитые на классы с одним и тем же значением истинности, приводят к понятию множества констант модели E , которые фактически отождествляют все индивидуальные высказывания, заменяя их соответствующими значениями истинности; переменные высказывания – к переменным величинам x_1, x_2, \dots , которые в качестве значений принимают элементы из множества E ; логической связки – к множеству M элементарных функций (операций), которые, как и их аргументы, принимают значения из E . Сложные высказывания, построенные из индивидуальных и переменных высказываний, а также логич. связок, приводят к множеству $\langle M \rangle$ формул над M . Значение истинности (из E) сложного высказывания является функцией от соответствующих значений истинности высказываний, входящих в данное сложное высказывание. В модели эта функция приписывается формуле, соответствующей данному сложному высказыванию; говорят также, что формула реализует эту функцию. Множество формул $\langle M \rangle$ приводит к множеству $[M]$ функций, реализуемых формулами из $\langle M \rangle$ и называемых суперпозициями над M . Множество $[M]$ называется замыканием множества M . Задание конкретной модели М. л. считается эквивалентным указанию множеств $E, M, \langle M \rangle$ и $[M]$; при этом говорят, что модель порождается множеством M . Эта модель называется формульной моделью, а также m -значной логикой, где m – мощность множества E .

Своеобразие подхода математич. кибернетики к M . л. состоит в рассмотрении моделей M . л. как управляющих систем. Элементарные функции при этом являются элементами, производящими определённые операции, а формулы интерпретируются как схемы, построенные из элементов и также осуществляющие переработку входной информации в выходную. Такого рода управляющие системы, известные в кибернетике как схемы из функциональных элементов, широко используются в теоретич. и практич. вопросах кибернетики. Вместе с тем существует ряд задач логики и кибернетики, которые связаны с изучением соответствий между множествами M и $[M]$ и при котором роль множества M несколько затухивается, сводясь к способу определения второго множества по первому. В этом случае приходят к др. модели M . л., которая представляет собой алгебру, элементами которой являются функции, принимающие в качестве значений, как и их аргументы, элементы из E . В качестве операций в этих алгебрах обычно используется спец. набор операций, эквивалентный в смысле соответствий M и $[M]$ множеству формул, построенных из функций множества M , т. е. получению сложных функций из заданных путём подстановки одних функций вместо аргументов других.

К числу задач, характерных для формульной модели M . л., относится задача об описании, т. е. вопрос об указании для заданного множества $M_2 \subseteq [M_1]$ всех формул из M_1 , реализующих функции из M_2 . Частным случаем такой задачи является важный вопрос математич. логики об указании всех формул, реализующих заданную константу, что, напр., для исчисления высказываний эквивалентно построению всех тождественно истинных высказываний. Пограничным вопросом между математич. логикой и алгеброй, примыкающим к задаче об описании, является задача о тождественных преобразованиях. В ней при заданном множестве M требуется выделить в некотором смысле простейшее подмножество пар равных (т. е. реализующих одну и ту же функцию) формул из M , позволяющее путём подстановки выделенных равных формул одной вместо другой получить из любой формулы все формулы, равные ей. Аналогичное место занимает один из важнейших вопросов для M . л. – т. н. проблема полноты, состоящая в указании всех таких подмножеств M_1 заданного замкнутого, т. е. совпадающего со своим замыканием, множества M , для которых выполнено равенство $[M_1] = M$, т. е. имеет место свойство полноты M_1 в M . Глобальной задачей для M . л. является описание структуры замкнутых классов данной модели многозначной логики.

Характерный для теории управляющих систем вопрос о сложности этих систем естественно возникает и по отношению к формулам и функциям из M . л. Типичной при таком подходе является следующая задача о сложности реализации. На множестве всех элементарных формул некоторым способом вводится числовая мера (сложность формул), которая затем распространяется на множество всех формул, напр. путём суммирования мер всех тех элементарных формул, которые участвуют в построении заданной формулы. Для заданной функции требуется указать ту (простейшую) формулу, которая реализует эту функцию и имеет наименьшую сложность, а также выяснить, как эта сложность зависит от некоторых свойств рассматриваемой функции. Исследуются разл. обобщения этой задачи. Широкий круг вопросов связан с реализацией функций формулами с наперёд заданными свойствами. Сюда относятся: задача о реализации функций алгебры логики дизъюнктивными нормальными формами и связанная с этим задача о минимизации, а также задача о реализации функций формулами в некотором смысле ограниченной глубины (т. е. такими формулами, в которых цепочка подставляемых друг в друга формул имеет ограниченную длину, такое ограничение связано с надёжностью и скоростью вычислений).

Для заданной модели M . л. решения всех перечисленных задач существенно зависят от мощности множества E и

множества M , порождающего эту модель.

К числу наиболее важных примеров M . л. относятся конечнозначные логики (т. е. m -значные логики, для которых m конечно). Среди них наиболее глубоко исследован случай $m = 2$. Важнейшим результатом здесь является полное описание структуры замкнутых классов и получение для них важной информации по задаче о сложности реализации. Установлено, что при $m > 2$ конечнозначные логики обладают рядом особенностей, существенно отличающих их от двузначного случая. Таковы, напр., континуальность множества замкнутых классов (при $m = 2$ их счётное число), особенности решения задачи о сложности реализации и ряд других. Общим результатом для конечнозначных логик является эффективное решение задачи о полноте для замкнутых классов, содержащих все функции со значениями в E . Решение остальных проблем для конечнозначных логик продвинуто в разл. степени. Особая значимость конечнозначных логик связана ещё и с тем, что они позволяют описывать работу разл. реальных вычислит. устройств и автоматов.

Примерами другой M . л. являются счётнозначные и континуум-значные логики (т. е. такие m -значные логики, для которых мощность m является соответственно счётной или континуальной). Эти модели играют важную роль в математич. логике, [моделей теории](#) и в математич. анализе. К M . л. иногда относят и такие алгебры функций, в которых запас операций несколько отличается от указанного. Как правило, это достигается путём сужения описанного запаса или введения в операции некоторых функций рассматриваемой многозначной логики.

Литература

Лит.: Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. Математического института АН СССР. 1958. Т. 51; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966; Кудрявцев В. Б. О функциональных системах. М., 1981; Многозначные логики и их применения. М., 2008. Т. 1–2.

Processing math: 0%