



# МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, поверхность, у которой средняя *кривизна* во всех точках равна нулю. Понятие М. п. возникло при решении следующей вариационной задачи: в пространстве дана некоторая замкнутая кривая; среди всех возможных поверхностей, проходящих через эту кривую, найти такую, для которой часть её, заключённая внутри кривой, имеет наименьшую площадь (миним. площадь – отсюда название М. п.). Если заданная кривая плоская, то решением является ограниченная этой кривой часть плоскости. В случае неплоской кривой необходимое условие, которому должна удовлетворять поверхность с миним. площадью, установлено Ж. *Лагранжем* (1760). Несколько позднее Ж. *Мёнье* предложил геометрич. описание этого условия в форме, эквивалентной требованию обращения в нуль средней кривизны. Хотя это условие не является достаточным, т. е. не гарантирует минимум площади, назв. «М. п.» сохраняется для всякой поверхности с нулевой средней кривизной. Если поверхность задана уравнением  $z=f(x,y)$ , то, приравнявая к нулю выражение для средней кривизны, приходят к дифференциальному уравнению с частными производными 2-го порядка  $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$ , где  $p=\partial z/\partial x$ ,  $q=\partial z/\partial y$ ,  $r=\partial^2 z/\partial x^2$ ,  $s=\partial^2 z/\partial x\partial y$ ,  $t=\partial^2 z/\partial y^2$ . Исследованием этого уравнения в разл. формах занимались мн. математики, начиная с Лагранжа и Г. *Монжа*. Примерами М. п. служат *винтовая поверхность*; *катеноид* – единственная (вещественная) М. п. среди поверхностей вращения; поверхность Шерка, определяемая уравнением

М. п. имеет во всех точках неположительную полную кривизну. Бельг. физик Ж. Плато предложил способ моделирования М. п. при помощи мыльных плёнок, натянутых на проволоочный каркас.

## Литература

Лит.: Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. М., 1957. М.; Ижевск, 2000; Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 5-е изд. М., 2010.