



МЕТРИКА

Авторы: А. А. Шкаликов

МЕТРИКА в математике, расстояние, определённое для любых двух элементов (точек) некоторого множества X . Точнее, M . – функция $d(x,y)$, определённая для любых двух элементов x,y из X , удовлетворяющая условиям: $d(x,y) \geq 0$ и $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=y$; $d(x,y) = d(y,x)$ (симметрия); $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (для любой тройки элементов) (неравенство треугольника). Название последнего свойства происходит из свойства обычного расстояния на плоскости: длина любой из сторон треугольника не больше суммы длин двух других его сторон.

Множество X с введённой на нём M . $d(x,y)$ называется [метрическим пространством](#). На одном и том же множестве X могут рассматриваться разные M ., при этом получаются разл. метрические пространства. Примером M . является обычное расстояние на прямой \mathbb{R}^1 , определяемое равенством $d(x,y) = |x-y|$ для любых действительных чисел x,y . Здесь $|x-y|$ означает абсолютную величину числа $x-y$. В n -мерном пространстве рассматривают M . $d(x,y) = (\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p)^{1/p}$,

где p – фиксированное число, $p \geq 1$, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ – элементы пространства, являющиеся наборами n действительных чисел (координат). Выполнение аксиомы треугольника гарантируется в этом случае [Минковского неравенством](#). Случай $p=2$ соответствует обычному расстоянию в евклидовом n -мерном пространстве \mathbb{R}^n ; неравенство треугольника в этом случае следует из [Коши неравенства](#).

В пространствах функций могут быть введены различные M ., от которых зависят свойства получающихся метрич. пространств. Выбор M . определяется спецификой решаемых задач. Напр., на множестве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций можно ввести равномерную M ., полагая для таких функций f, g $d(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$

(так получаемые пространства обозначают $C[a,b]$) или интегральную M . (при фиксированном $p \geq 1$) $d(f,g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx)^{1/p}$. Если пространство X является линейным [нормированным пространством](#), то в качестве M . обычно выбирается норма, т. е. $d(x,y) = \|x-y\|$. В [гильбертовом пространстве](#) M . задаётся равенством $d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$.