



МА́ТРИЦА

Авторы: Т. С. Пиголкина

МА́ТРИЦА, таблица вида $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$

или $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

образованная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов. Эта таблица называется прямоугольной M . размера $m \times n$ (читается « m на n », знак \times не означает умножение) или $(m \times n)$ -матрицей с элементами a_{ij} , элемент a_{ij} расположен в i -й строке и j -м столбце, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. При $m=n$ M . называется квадратной, а число n – её порядком. M . A и B считаются равными, если они имеют один и тот же размер и элементы, стоящие в A и B на одинаковых местах, равны между собой, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. Сокращённо M . обозначается $A=||a_{ij}||$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. Квадратная M . в сокращённой записи иногда обозначается $||a_{ij}||_1^n$. M ., состоящая из одной строки, называется строкой (вектор-строкой), а состоящая из одного столбца – столбцом (вектор-столбцом). M ., получающаяся из M . A заменой строк столбцами, называется транспонированной матрицей по отношению к A и обозначается A^T (иногда A').

Чаще всего рассматриваются M ., элементами которых являются действительные или комплексные числа или элементы некоторого поля K ; соответственно M . называются действительными, комплексными или M . над полем K . Если A – комплексная M ., то M ., получающаяся из A заменой её элементов комплексно сопряжёнными, называется M ., комплексно сопряжённой с A , и обозначается \overline{A} . Если элементы транспонированной M . A^T заменяют на комплексно сопряжённые им числа, то получают M . $A^* = ||a^*_{ij}||$, называемую сопряжённой или эрмитово-сопряжённой с A , здесь $a^*_{ij} = \overline{a^*_{ij}}$.

Действия над матрицами

(все M . рассматриваются над одним полем K). Важнейшими алгебраич. операциями над M . являются сложение M ., умножение M . на число (элемент поля K), умножение матриц.

Суммой $A+B$ двух прямоугольных M . A и B одного размера $m \times n$ называется M . C размера $m \times n$, для которой элемент $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$, т. е. равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

Произведением M . A на число α называется M . αA , элементы которой получаются из элементов M . A умножением на α , т. е. $\alpha A=||\alpha a_{ij}||$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. Эти операции обладают свойствами

$$A+B=B+A, \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \alpha(A+B)=(\alpha A+B)+C, (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B, \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A.$$

Умножение M . определяется только для таких пар M ., у которых число столбцов в 1-м сомножителе равно числу строк во 2-м сомножителе, при этом произведение AB M . $A=||a_{ij}||$ размера $m \times n$ на M . $B=||b_{jk}||$ размера $n \times s$ есть M . $C=||c_{ik}||$, для которой $c_{ik}=\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$, $i=1, \dots, m$, $k=1, \dots, s$

(правило умножения строки на столбец). Умножение M . обладает свойствами

$$(AB)C=A(BC), \|(A+B)C=AC+BC, \|A(B+C)=AB+AC, \|\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B).$$

Справедливы также равенства

$$(AB)^T=B^T A^T, \overline{AB}=\overline{A}\overline{B}, (AB)^*=B^*A^*.$$

Произведения AB и BA , если они определены одновременно, напр. для квадратных M . одного порядка, вообще говоря, зависят от порядка сомножителей, т. е. равенство $AB=BA$ может не выполняться; напр.,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $AB=BA$, то M . A и B называются перестановочными (коммутирующими).

Квадратные матрицы

Элементы a_{ij} , $i=1, \dots, n$, квадратной M . $A=\|a_{ij}\|$ называются диагональными; эти элементы расположены на т. н. главной диагонали M . Квадратная M ., у которой все элементы, не лежащие на гл. диагонали, равны нулю, т. е. M . вида $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$

называется диагональной и обычно обозначается $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Если в диагональной M . все элементы на гл. диагонали равны единице, то M . называется единичной и обозначается E или I (соответственно E_n или I_n , если нужно указать её порядок): $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Для любой M . A размера $m \times n$ справедливы равенства

$$AE_n=A, \quad E_m A=A.$$

Каждой квадратной M . можно поставить в соответствие число (элемент поля K), называемое её определителем или детерминантом. Минором k -го порядка матрицы A размера $m \times n$ называется определитель k -го порядка, составленный из элементов, находящихся на пересечении некоторых k строк и k столбцов матрицы A в их естественном расположении. Рангом матрицы A называется максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы A .

Определитель произведения двух квадратных M . равен произведению их определителей. Квадратная M . называется невырожденной, если её определитель не равен нулю; в противном случае M . называется вырожденной. Для любой невырожденной M . A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая равенством $AA^{-1}=E$. Обратная матрица перестановочна с исходной, т. е. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Справедливо равенство $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Квадратные M . A и B одного порядка n называются подобными, если существует невырожденная M . S того же

порядка n такая, что $B=S^{-1}AS$. Одной из задач теории M . является поиск $M.B$, подобной $M.A$ и имеющей более простой вид. Решение этой задачи связано с рассмотрением характеристич. многочлена $M.A$ и собственных векторов соответствующего [линейного преобразования](#). В качестве канонич. вида $M.$, подобной данной, принимается, напр., жорданова нормальная форма $M.$, когда $M.B$ представляется в виде
$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_p \end{pmatrix}$$

где B_1, \dots, B_p – т. н. жордановы клетки, т. е. квадратные матрицы вида
$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i, i=1, \dots, p$, – собств. значения линейного преобразования с $M.A$.

В таблице даны определения некоторых важных типов комплексных M . со спец. свойствами симметрии.

Матрица	Определяющее условие
Симметрическая	$A^T=A$
Кососимметрическая	$A^T=-A$
Эрмитова	$A^*=A$
Косоэрмитова	$A^*=-A$
Ортогональная	$A^T=A^{-1}$
Унитарная	$A^*=A^{-1}$
Нормальная	$AA^*=A^*A$

Эрмитова (и, в частности, симметрическая) M . с действительными элементами подобна диагональной $M.B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где все λ_i – действительные числа. В качестве $M.S$ в формуле $B=S^{-1}AS$ можно взять для эрмитовой M . унитарную, а для симметрической – ортогональную M . Это свойство симметрич. M . с действительными элементами лежит в основе метода приведения [квадратичной формы](#) к гл. осям, применяемого в аналитич. геометрии и механике.

Функции от матриц

Для любой квадратной $M.A$ степень M . с натуральным показателем определяется как произведение одинаковых сомножителей A : $A^k = A \dots A$, при этом полагают $A^0 = E$. Каждый многочлен

$$P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

степени n с коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_n из поля K определяет функцию от квадратной матрицы A над полем K , имеющую вид

$$P_n(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n E.$$

Рассматриваются также аналитич. функции от M . Если аналитич. функция $f(t)$ определяется рядом

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

сходящимся на всей комплексной плоскости, то можно рассматривать функцию от $M.A$ $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$

$\}a_kX^k,$

напр., $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$

Применения матриц

Матричный язык, обозначения и матричные вычисления используются в разл. областях совр. математики и её приложений. М. являются осн. математич. аппаратом [линейной алгебры](#) и применяются при исследовании линейных отображений векторных пространств, линейных и квадратичных форм, систем линейных уравнений. М. используются в математич. анализе, механике и теоретич. электротехнике, квантовой теории и др. (см. [Матричные методы](#)). Бесконечные М. используются в функциональном анализе (теория линейных операторов, теория представлений групп).

Историческая справка. Впервые М. как математич. понятие появилось в работах У. [Гамильтона](#), А. [Кэли](#) и Дж. [Сильвестра](#) в сер. 19 в. Основы теории М. созданы К. [Вейерштрассом](#) и Ф. Г. [Фробениусом](#) во 2-й пол. 19 – нач. 20 вв. Совр. обозначение – две вертикальные черты – ввёл Кэли (1841).

Литература

Лит.: Беллман Р. Введение в теорию матриц. 2-е изд. М., 1976; Ланкастер П. Теория матриц. 2-е изд. М., 1982; Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М., 1984; Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М., 1999; Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. 5-е изд. М., 2009; Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. М., 2010.

Processing math: 0%