



МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ

Авторы: В. С. Владимиров

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ, дифференциальные уравнения с частными производными, а также некоторые родств. уравнения иных типов (интегральные, интегродифференциальные и т. д.), к которым приводит математич. анализ физич. явлений. Для полного описания динамики физич. процесса, помимо уравнений, необходимо задать состояние процесса в некоторый фиксированный момент времени (начальные условия) и режим на границе среды, где протекает этот процесс (граничные условия). Начальные и граничные условия образуют краевые условия, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями приводят к [краевым задачам](#) математич. физики.

В 19 в. в математич. физике изучались: уравнение Пуассона

$$\Delta u = f, \quad u = u(x), \quad f = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ и G — область в n -мерном пространстве \mathbb{R}^n (при $f=0$ это уравнение превращается в [Лапласа уравнение](#)); уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad u = u(x, t), \quad f = f(x, t), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{2}$$

и [волновое уравнение](#)

$$\square u = f, \quad u = u(x, t), \quad f = f(x, t), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ — оператор Д'Аламбера (даламбертиан). Уравнения (2) и (3), не зависящие от параметра t , который обычно играет роль времени, называются стационарными; они сводятся к уравнению (1).

В 1860 появилось уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f, \quad u = u(x), \quad f = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

описывающее установившиеся колебательные процессы; при $k = 0$ это уравнение превращается в уравнение (1).

В 1920-х гг. появилось [Клейна — Фока — Гордона уравнение](#)

$$\square u + m^2 u = 0, \quad u = u(t, x).$$

Кроме перечисленных уравнений, в теории М. ф. у. рассматривались уравнение Ньютона движения частицы массы m в поле с потенциалом $V(x)$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^3$,

$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\text{grad} V(x)$, $\tag{5}$ уравнение Кортевега — де Фриза $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$, $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^1$ описывающее распространение волн на мелкой воде, и уравнение колебаний маятника

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \operatorname{sin} u = 0, \quad u = u(t)$. Для уравнения (1) граничные условия $u|_{x \in S} = v(x)$ или $\frac{\partial u}{\partial n}|_{x \in S} = v_1(x)$ (6) где S – граница области G и n – вектор внешней нормали к S , приводят к задачам, называемым задачей Дирихле и задачей Неймана соответственно. Для уравнения (2) начальное условие

$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$, $\tag{7}$ определяет задачу Коши. Для уравнения (3) начальные условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

определяют задачу Коши. Для уравнений (2) и (3) рассматриваются также смешанные задачи, которые содержат как граничные условия (6), так и начальные условия (7) или (8). Для уравнения (4) рассматриваются граничные условия на бесконечности, которые имеют вид $u(x) = e^{ik(a, x)} + v(x), \quad a \in \mathbb{R}^3, \quad |a| = 1$, где i – мнимая единица, (a, x) означает скалярное произведение a и x , а функция $v(x)$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|}|_{|x| \rightarrow \infty} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Для уравнения Ньютона (5) задаются начальные положение $x(0) = x_0$ и скорость $\frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0} = x_1$ частицы при $t=0$.

К более сложным М. ф. у. относятся системы нелинейных дифференциальных уравнений гидродинамики,

[Гамильтона уравнения](#), [Лиувилля уравнение](#), [Максвелла уравнения](#), [Навье – Стокса уравнения](#) и др.

Перечисленные уравнения и соответствующие краевые задачи составляют предмет классич. математич. физики, которая не утрачивает своего значения.

В М. ф. у. выделяется важный класс задач, поставленных корректно по Адамару, т. е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

В 20 в. с развитием квантовой физики, теории относительности и ядерной энергетики появились уравнения и краевые задачи совр. математич. физики, среди которых – [Шрёдингера уравнение](#)

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + V(x)u, \quad u = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где \hbar – постоянная Планка, m – масса частицы, и для этого уравнения ставится задача Коши. Для стационарного уравнения Шрёдингера граничным условием может быть условие принадлежности функции u к [гильбертову пространству](#) $L_2(\mathbb{R}^3)$, отражающее поведение решения на бесконечности. Среди уравнений совр.

математич. физики – односкоростное уравнение переноса для изотропного рассеяния $\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + (\Omega, \operatorname{grad} u) + \alpha u = \frac{\beta}{4\pi} \int_{|\Omega|=1} u(x, \Omega', t) d\Omega' + F$

где $u(t, \Omega, x)$ – плотность частиц, движущихся со скоростью v в направлении $\Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^3, \quad |\Omega| = 1$, в точке $x \in \mathbb{R}^3$ в момент времени t , и для этого уравнения рассматривается задача Коши. Для стационарного уравнения переноса в качестве граничного условия для выпуклой области рассматривается условие

$$u(t, \Omega, x) = 0, \quad \text{при } x \in S, \quad (\Omega, n) < 0,$$

где S – граница области, n – внешняя нормаль к S . Это условие означает отсутствие падающего потока частиц.

Более сложными уравнениями совр. математич. физики являются уравнения квантовой теории поля, в частности

[Дирака уравнение](#) и [Янга – Миллса уравнение](#), уравнения гравитац. поля, [Боголюбова цепочка уравнений](#). К таким уравнениям относятся также уравнения p -адической математич. физики, в частности т. н. уравнение динамики [таххионов](#) p -адических струн

$$\exp(\alpha \square u) = u^p, \quad u = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^{d-1},$$

где p – простое число, с граничными условиями

$$u(\pm \infty, x) = 1 \quad \text{для замкнутой струны, } \alpha = 1/4;$$

$$u(\pm \infty, x) = 1, \quad u(\pm \infty, x) = -1 \quad \text{для открытой струны, } \alpha = 1/2, \quad p \neq 2.$$

Литература

Лит.: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: В 2 т. М., 1951; Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1977–1982. Т. 1–4; Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М., 1982; *Владимиров В. С.*, Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М., 1994; Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. 2-е изд. Ижевск, 2001; Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 7-е изд. М., 2004.

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/fontdata.js