МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ

Авторы: В. Г. Карманов

МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВА**НИЕ**, раздел математики, посвящённый теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями. Эти ограничения могут задаваться равенствами и неравенствами. М. п. охватывает широкий класс задач управления, математич. моделями которых являются конечномерные экстремальные задачи. Задачи М. п. находят применение в разл. областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий, напр. при решении проблем управления и планирования производств. процессов, в задачах проектирования и перспективного планирования. Назв. «М. п.» связано с тем, что целью решения задач является выбор программы действий.

Задача М. п. состоит в том, чтобы минимизировать скалярную функцию $\varphi(x)$ векторного аргумента $x \in \mathbf{R}^n$, принимающего значения из множества

$$X=\{x: g_i(x) \geqslant 0,\ i=1,2,...,k;\ h_j(x)=0,\ j=1,2,...,m\},$$

где $g_i(x)$, $i=1,2,...,k,$ и $h_j(x)$, $j= 1,2,...,m,$ – скалярные функции; функцию $\varphi(x)$ называют целевой функцией или функцией цели, множество X – множеством допустимых решений, решение задачи М. п. – оптимальной точкой.

В М. п. входят *линейное программирование*, где целевая функция $\varphi(x)$ и функции $g_i(x)$, $i=1,2,...,k,$ и $h_j(x)$, $j=1,2,...,m,$ линейны; выпуклое программирование, где целевая функция и множество допустимых решений выпуклы; квадратичное программирование, где целевая функция квадратична и множество допустимых решений определяется линейными равенствами и неравенствами; дискретное программирование, где решение ищется лишь в дискретных, напр. целочисленных, точках множества X; стохастич. программирование, где, в отличие от детерминированных задач, входная информация носит элементы неопределённости.

Задачи перечисленных разделов М. п. обладают следующим свойством: всякая точка локального минимума является оптимальной точкой. По-иному обстоит дело в т. н. многоэкстремальных задачах, в которых указанное свойство не имеет места.

В основе выпуклого программирования, и в частности линейного и квадратичного, лежит теорема Куна – Таккера о необходимых и достаточных условиях существования оптимальной точки x^*: для того чтобы точка x^* была оптимальной, т. е.

$$\varphi(x^*)=\min_{x\in X}\varphi(x),$$

$$X=\{x: f_i(x) \geqslant 0,\ i=1,2,...,k\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка $y^*= (y^*_1, y^*_2,...,y^*_k)$, чтобы пара точек x^*, y^* была седловой точкой функции Лагранжа $L(x,y)=\varphi(x)+\sum_{i=1}^{k}y_ig_i(x)$.

Последнее означает, что $L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$ для любых x и всех $y \geqslant 0$. Если ограничения нелинейны, то эта теорема справедлива при некоторых дополнит. предположениях о множестве допустимых решений. Если функции $\varphi(x)$ и $f_i(x), \:i=1,2,\dots,k,$ дифференцируемы, то седловую точку определяют соотношения $\frac{\partial L}{\partial x_j}\geqslant 0,\:j=1,2,...,n;\ \ \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial x_j}x_j=0;\:\frac{\partial L}{\partial y_i}\leqslant 0,\:i=1,2,...,k;$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial y_j}y_j=0;\:\ y_i\leqslant 0,\:i=1,2,...,k.$$

Т. о., задача выпуклого программирования сводится к решению системы уравнений и неравенств.

На основе теоремы Куна – Таккера разработаны разл. итерационные методы минимизации, сводящиеся к поиску седловой точки функции Лагранжа.

В М. п. важную роль играют вычислит. методы решения экстремальных задач. Широким классом таких методов являются методы проектирования. Идея этих методов состоит в следующем. В точке $x^k \in X$ выбирается направление спуска s^k, т. е. одно из направлений, по которому функция $\varphi(x)$ убывает, и вычисляется

$x^{k+1}=p(x^k+\alpha_ks^k)$, где $p(x^k+\alpha_ks^k)$ означает проекцию точки $x^k+\alpha_ks^k$ на множество X: $\left| p(x^k+\alpha _ks^k) -(x^k+\alpha _ks^k)\right| =\min_{x\in X}\left| x-(x^k+\alpha _ks^k) \right|$, число $\alpha_k > 0$ выбирается при этом так, чтобы $\varphi (x^{k+1}) < \varphi (x^k)$. Существуют разл. варианты методов проектирования. Наиболее распространённым из них является метод проекции градиента, когда $s^k=-\text{grad}\,\varphi(x^k)$.

Характерной особенностью вычислит. методов решения задач М. п. является использование ЭВМ, в первую очередь потому, что задачи М. п., связанные с ситуациями управления реальными системами, – задачи большого объёма.

Важное направление исследований в М. п. – проблемы устойчивости. Здесь существенное значение имеет изучение класса устойчивых задач, т. е. задач, для которых малые возмущения (погрешности) в исходной информации влекут за собой малые возмущения и в решении. В случае неустойчивых задач большая роль отводится процедуре аппроксимации неустойчивой задачи последовательностью устойчивых задач – т. н. процессу регуляризации.

М. п. как наука сформировалось в 1950–70-х гг. Это обусловлено гл. обр. развитием ЭВМ, что дало возможность проводить математич. обработку больших объёмов информации.

Литература

Лит.: Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. 2-е изд. М., 1967;Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., 1967.