



МАРТИНГА́Л

Авторы: А. Н. Ширяев

МАРТИНГА́Л, *случайный процесс*, описание вероятностной структуры которого даётся в терминах условных математич. ожиданий.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – *вероятностное пространство*, на котором задана последовательность σ -алгебр $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$. Последовательность действительных случайных величин $M = (M_n)_{n \geq 0}$, заданная на фильтров. вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$, называется *M*. [относительно σ -алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ и вероятности \mathbf{P}], если $\mathbf{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ (\mathbf{P} -почти наверное, т. е. равенство справедливо на событии, вероятность которого равна 1) для каждого $n \geq 0$. Для всякого *M*. математич. ожидание $\mathbf{E}[M_n]$ не зависит от *n*.

В тех случаях, когда $\mathbf{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq M_n$ (\mathbf{P} -почти наверное), говорят, что $M = (M_n)_{n \geq 0}$ есть субмартингал. В случае выполнения неравенств $\mathbf{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq M_n$ (\mathbf{P} -почти наверное) говорят, что $M = (M_n)_{n \geq 0}$ есть супермартингал. Всякий супермартингал изменением знака можно превратить в субмартингал. Для субмартингалов справедливо разложение Дуба: если $X = (X_n)_{n \geq 0}$ – субмартингал, то найдётся такой *M*. $M = (M_n)_{n \geq 0}$ и возрастающая предсказуемая последовательность $A = (A_n)_{n \geq 0}$ (т. е. $A_0 = 0$, A_n являются \mathcal{F}_{n-1} -измеримыми при каждом $n \geq 1$), что \mathbf{P} -почти наверное $X_n = M_n + A_n$, $\forall n \geq 0$.

Перечисленные понятия переносятся на случай непрерывного времени. Теория *M*. в непрерывном времени легла в основу т. н. стохастич. исчисления (где используются понятие стохастич. интеграла и *стохастические дифференциальные уравнения*). Классич. примерами *M*. являются броуновское движение (*винеровский процесс*), центриров. процесс Пуассона, некоторые классы интегралов по броуновскому движению и центриров. пуассоновской мере.

Зарождение теории *M*., как и многих осн. понятий теории вероятностей, связано с математич. анализом выигрыша в т. н. безобидных (справедливых) играх. Напр., если независимые случайные величины X_t , $t = 1, 2, \dots$, принимают два значения +1 и –1 с вероятностями $1/2$, определяя случайный выигрыш и проигрыш игрока на *t*-м шаге игры, его ставка на первом шаге есть a_1 , а на *t*-м шаге, $t \geq 2$, есть $a_t = a_t(X_1, \dots, X_{t-1})$, т. е. на *t*-м шаге, $t \geq 2$, игрок выбирает ставку по некоторому правилу, учитывающему его выигрыши и проигрыши на предыдущих шагах, то капитал M_n игрока в момент *n* есть $M_n = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = M_{n-1} + a_n X_n$, $\forall n \geq 1$. Поэтому при всех $n \geq 1$ условное математич. ожидание $\mathbf{E}[M_n | X_1, \dots, X_{n-1}] = M_{n-1}$. Именно это свойство, определяющее т. н. безобидную (справедливую) игру, положено в основу общего определения мартингала.

Литература

Лит.: Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., 1956; Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартиггалов. М., 1986;

Жако́д Ж., Ши́ряев А. Н. Пределные теоремы для случайных процессов: В 2 т. М., 1994; Ши́ряев А. Н.

Вероятность: В 2 кн. М., 2007.

Processing math: 0%