



# МА́РКОВСКИЙ ПРОЦЕ́СС

Авторы: А. В. Прохоров

МА́РКОВСКИЙ ПРОЦЕ́СС, случайный процесс без последействия. Класс М. п. широко применяется в разл. разделах естествознания и техники. М. п. являются моделями мн. процессов в физике (распад радиоактивного вещества, каскадные процессы), в биологии (рост популяций, процессы мутаций, распространение эпидемий), в астрономии (флуктуация яркости галактик), в химии, в [массового обслуживания теории](#).

[Случайный процесс](#)  $X(t)$  называется марковским, если для любых двух моментов времени  $t_0$  и  $t_1$ ,  $t_1 \geq t_0$ , условное распределение случайной величины  $X(t_1)$  при условии, что заданы все значения случайных величин  $X(t)$  при  $t \leq t_0$ , зависит только от значения случайной величины  $X(t_0)$ . Это свойство, определяющее М. п., называется марковским свойством или отсутствием последействия: состояние процесса  $X(t)$  в момент времени  $t_0$  однозначно определяет распределение вероятностей будущего развития процесса при  $t > t_0$ , а информация о прошлом поведении процесса до момента  $t_0$  не влияет на это распределение. В этом смысле М. п. обобщают детерминированные процессы классич. физики. Развитие теории М. п. началось в 1907 с работ А. А. [Маркова](#), посвящённых изучению последовательностей зависимых случайных величин (см. [Маркова цепь](#)). Общая теория М. п. и их классификация были даны А. Н. [Колмогоровым](#) (1931).

Первым был исследован подкласс М. п. с дискретным множеством состояний. Пусть в каждый момент времени некоторая система может находиться в одном из состояний  $E_1(t), E_2(t), \dots, E_n(t)$  и с течением времени случайным образом переходит из одного состояния в другое. Для М. п. переход из состояния  $E_i(t)$  в некоторый момент времени в состояние  $E_j(t + \Delta t)$  за промежуток времени  $\Delta t$  определяется вероятностью  $p_{ij}(t, \Delta t)$  или  $p_{ij}(\Delta t)$  в однородном случае [т. е. когда  $p_{ij}(t, \Delta t)$  зависит только от  $\Delta t$ ], причём эта вероятность не зависит от того, как этот процесс развивался в прошлом, т. е. до момента времени  $t$ . Вероятности  $p_{ij}(t, \Delta t)$  называются переходными вероятностями. При очень широких условиях переходные вероятности М. п. удовлетворяют системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Типичным примером таких М. п. является [ветвящийся процесс](#).

Большое значение в приложениях имеют М. п., для которых случайное состояние некоторой системы зависит от непрерывно меняющихся параметров. Важным представителем таких М. п. служит физич. процесс диффузии, в котором состояние системы описывается непрерывно изменяющейся координатой некоторой частицы. В этом случае вместо переходных вероятностей рассматривают соответствующие плотности вероятности  $p(t, x, y)$ , по которым вычисляются вероятности  $p(t, x, y)dy$  того, что частица, находившаяся в точке с координатой  $x$ , через промежуток времени  $t$  будет иметь координату, заключённую между  $y$  и  $y + dy$ . При некоторых общих условиях плотности  $p(t, x, y)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = - \frac{\partial}{\partial y} (A(y)p(t, x, y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B(y)p(t, x, y)),$$

которое рассматривалось в физике для диффузионного процесса Фоккера – Планка. В этом уравнении коэффициент  $A(y)$  представляет собой среднюю скорость изменения координаты  $y$ , а коэффициент  $B(y)$  –

интенсивность случайных колебаний около этой средней скорости. Важным представителем этого класса М. п. является броуновское движение, математич. моделью которого служит [винеровский процесс](#).

## Литература

Лит.: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. 2-е изд. М., 2010.

Processing math: 100%